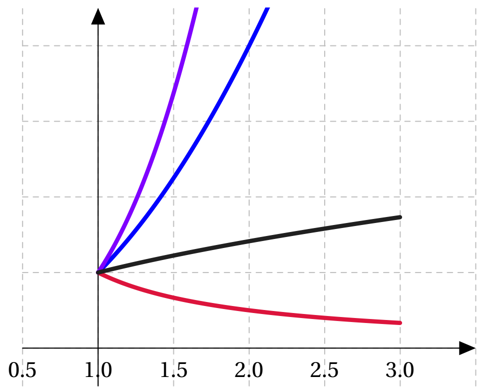
Exercices : Fonctions de référence

I. Exercices de base

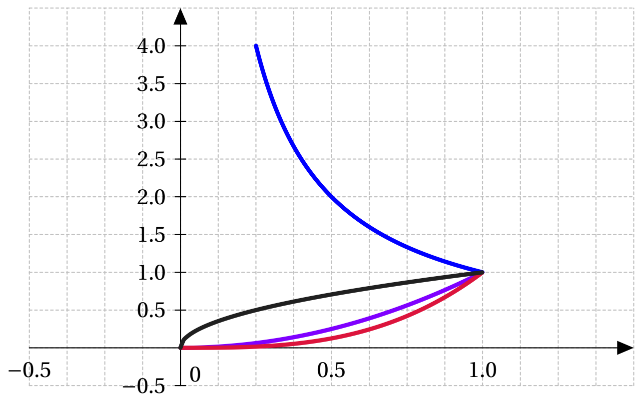
Exercice 1 ✧

Reconnaître les fonctions de référence associée au expression ($\sqrt{x}$; $\frac{1}{x}$; x^2 et x^3) en expliquant le démarche (il y a plusieurs démarches possibles) :



Exercice 2 ✧

Reconnaître les fonctions de référence associée au expression ($\sqrt{x}$; $\frac{1}{x}$; x^2 et x^3) en expliquant le démarche (il y a plusieurs démarches possibles) :



Exercice 3 ✧

Déterminer une fenêtre graphique de la calculatrice adaptée pour construire les courbes des fonctions de référence suivantes dans l'intervalle I ; donner sans justifier le tableau de variations de la fonction sur l'intervalle I :

1. $$\begin{array}{rccl} f: & I=[2\,;\,100] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccl} f: & I=[-50\,;\,10] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=x^2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rccl} f: & I=[10\,;\,20] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}$$

4. $$\begin{array}{rccl} f: & I=[-1\,;\,0[\cup]0\,;\,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}$$

5. $$\begin{array}{rccl} f: & I=[-10\,;\,20] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=x^3 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{rccl} f: & I=[0\,;\,400] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\sqrt{x} \end{array}$$

Exercice 4 ✧

Sans justifier, à l'aide des représentations graphiques des fonctions de référence (à connaître par cœur), résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2=256$
2. $x^2=-10$
3. $x^2-5=0$
4. $\dfrac{1}{x}=-1$
5. $\dfrac{1}{x}=4$
6. $x^3=125$
7. $x^3=-1$
8. $\sqrt{x}=6$
9. $\sqrt{x}=\sqrt{2}$

☞**Exercice 5** ✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{4}{x} = x$
2. $\sqrt{4x} = x+1$
3. $x^3 - 9x = 0$
4. $x^3 + 5x^2 = 0$

☞**Exercice 6** ✧

Sans justifier, à l'aide des représentations graphiques des fonctions de référence (à connaître par cœur), résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 < 121$
2. $x^2 - 3 > 0$
3. $\dfrac{1}{x} < -1$
4. $\dfrac{1}{x} < 5$
5. $x^3 > -64$
6. $\sqrt{x} < 81$

II. Prolongement des fonctions de référence

☞**Exercice 7** ✧✧

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (-5x+3)^2+6 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $(-5x+3)^2 = 0$.
2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,0,6]$:

   $a < b \leqslant 0,6$

   Comparer $-5a$ et $-5b$ et -3

   Comparer $-5a+3$ et $-5b+3$ et 0

   Comparer $(-5a+3)^2$ et $(-5b+3)^2$

   Comparer $(-5a+3)^2+6$ et $(-5b+3)^2+6$
3. De la même manière que la question précédente, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $[0,6\,;\,+\infty[$.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.

☞Exercice 8 ✧✧

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -(x+1)^2+4 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $(x+1)^2=0$.
2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,-1]$:

   $a<b\leqslant -1$

   Comparer $a+1$ et $b+1$ et 0

   Comparer $(a+1)^2$ et $(b+1)^2$

   Comparer $-(a+1)^2$ et $-(b+1)^2$

   Comparer $-(a+1)^2+4$ et $-(b+1)^2+4$
3. De la même manière que la question précédente, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x)>0$.
   Après avoir factorisé $f(x)$, on pourra faire un tableau de signe de $f(x)$ puis conclure.

☞Exercice 9 ✧✧

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[$ par

$$f: \begin{array}{rcl}]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2}{x-3}-5 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $x-3=0$.
2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,3[$:

   $a<b<3$

   Comparer $a-3$ et $b-3$ et 0

   Comparer $\dfrac{1}{a-3}$ et $\dfrac{1}{b-3}$

   Comparer $\dfrac{2}{a-3}$ et $\dfrac{2}{b-3}$

   Comparer $\dfrac{2}{a-3}-5$ et $\dfrac{2}{b-3}-5$
3. De la même manière que la question précédente, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x)\leqslant 0$.
   Après avoir réduit au même dénominateur l'expression $f(x)$, on pourra faire un tableau de signe de $f(x)$ puis conclure.

III. Problèmes

☞**Exercice 10** ✧

Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère la parabole d'équation $y = x^2$, le point A d'abscisse a de la parabole, $a > 0$ et le point A' symétrique du point A par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.
Déterminer la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle $AA'O$ est 27 (unité d'aire).

☞**Exercice 11** ✧✧

Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, le point A d'abscisse a, $a > 0$ de la courbe et le point A' de coordonnées $(a\,;\,0)$.
On définit la fonction $\mathscr{A}$ qui à la variable a associe l'aire du triangle rectangle OAA' (en unité d'aire).

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la valeur a_0 pour laquelle $\mathscr{A}(a_0) = \dfrac{1}{2}$.

☞**Exercice 12** ✧✧✧

Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_1$ d'équation $y = \sqrt{x}$ et la courbe $\mathscr{C}_2$ d'équation $y = x^2$.
soit $a > 0$ et le point A de coordonnées $(a\,;\,\sqrt{a})$ et le point A' de coordonnées $(\sqrt{a}\,;\,a)$.
On définit la fonction $\mathscr{A}$ qui à la variable a associe l'aire du triangle OAA' (en unité d'aire).

1. Montrer que le point A' est un point de $\mathscr{C}_2$ et que le triangle OAA' est isocèle.
2. Montrer que $\mathscr{A}$ a pour expression $\dfrac{|a^2 - a|}{2}$.
   On pourra raisonner par disjonction de cas ($0 < a < 1$ et $1 < a$).
3. Montrer que $\mathscr{A}$ est une fonction croissante.
4. Pour quelle valeur de a ($a > 0$), l'aire est-elle nulle ?
5. Est-il vrai que si a est un entier naturel non nul alors $\mathscr{A}(a)$ est un entier naturel non nul ? Justifier.
   Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.