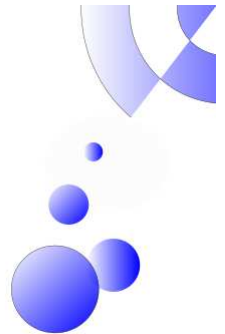
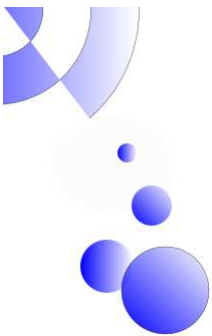




Table des Matières

I. Proportions sous-population	1
I. A. Pourcentage	1
I. B. Pourcentage de pourcentage	1
II. Évolutions	3
II. A. Évolution simple	3
II. B. Évolution successive	5
II. C. Évolution réciproque	6



I. Proportions sous-population

I. A. Pourcentage

🔗 Activité 1

Avec 742 800 habitants en 2010 et 44 habitants par kilomètre carré, le Limousin figure, avec la Corse, parmi les régions les moins densément peuplées. Il est la région la plus âgée de France. Sur 100 habitants, 30 plus de 60 ans et 13 plus de 75 ans (respectivement 23 et 9 en France métropolitaine). En proportion, le Limousin compte un peu moins de jeunes que la France métropolitaine (21% des habitants ont moins de 20 ans contre 24% au niveau national).

source : INSEE-dossier Limousin - numéro 18

1. Quelle est la surface du territoire du Limousin ?
2. Combien y a-t-il de jeune de moins de 20 ans en Limousin en 2010 ?
3. En 2010, quel pourcentage des habitants du Limousin ont entre 20 ans et moins de 60 ans ?

La notation des pourcentages semble tirer son origine de l'italien. Dans les textes du Moyen Âge, on peut voir des notations comme "per cento". ou "per c." ou "p. cento".

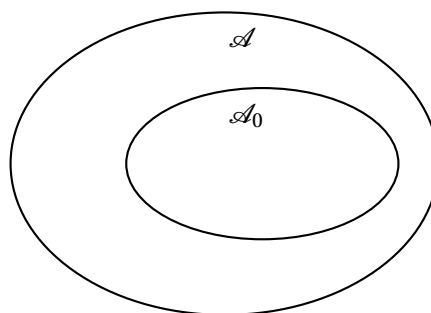
👉 Définition

Soit une population \mathcal{A} de taille N et une sous-population \mathcal{A}_0 de taille n_0 .

La proportion (ou fréquence) de la sous-population \mathcal{A}_0 parmi la population \mathcal{A} est le nombre $\frac{n_0}{N}$.

Ce nombre donné en pourcentage est noté :

$$100 \times \frac{n_0}{N} \%$$



👉 Exemple

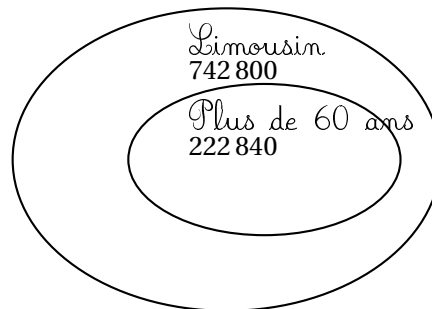
Dans l'activité précédente 30% des habitants du Limousin ont plus de 60 ans :

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{n}{742800}$$

$$N = 742800, n = 742800 \times \frac{30}{100} = 222840.$$

222 840 habitants de plus de 60 ans vivent en Limousin.

On remarque que $30\% = 0,3$.



I. B. Pourcentage de pourcentage

🔗 Activité 2

D'après l'article de l'INSEE, en 2010 21% des habitants du limousin ont moins de 20 ans.

Sachant qu'en 2010 la France métropole comptait 62 765 000 habitants et la région Limousin 742 800 habitants, calculer de deux manières, la proportion, exprimée en pourcentage, des jeunes de moins de 20 ans Limousin parmi les habitants de la France métropolitaine.

Propriété

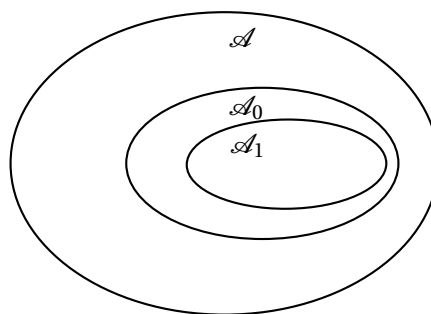
Soit une population \mathcal{A} de taille N et une sous-population \mathcal{A}_0 de taille n_0 et une sous-population \mathcal{A}_1 de la sous-population \mathcal{A}_0 de taille n_1 .

La proportion de la sous-population \mathcal{A}_1 parmi la population \mathcal{A} est le nombre

$$\frac{n_1}{N} = \frac{n_1}{n_0} \times \frac{n_0}{N}$$

Ce nombre donné en pourcentage est donné par :

$$100 \times \frac{n_1}{n_0} \% \times 100 \times \frac{n_0}{N} \%$$



Exemple

En reprenant les données de l'INSEE, en 2010, 30% des habitants du Limousin ont plus de 60 ans contre 23% au niveau national.

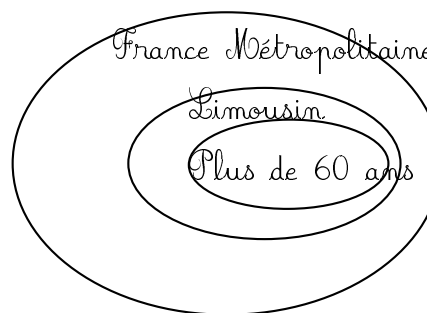
en 2010 la France métropole comptait 62 765 000 habitants et la région Limousin 742 800 habitants.

Proportion des habitants du Limousin parmi la France métropolitaine : $\frac{742\,800}{62\,765\,000} \approx 0,0118 = 1,18\%$.

Proportion des plus de 60 ans Limousin parmi les habitants de la France métropolitaine :

$$1,18\% \times 30\% = 0,0118 \times 0,3 = 3,54 \times 10^{-3} = 0,354\%$$

En 2010, 0,354% des français (de la métropole), sont des habitants du Limousin âgés de plus de 60 ans.



II. Évolutions

II. A. Évolution simple

On note :

- V_0 : le nombre réel de référence, la valeur initiale.
- V_1 : le nombre réel obtenu après une évolution soit la valeur finale.
- V_e : la valeur de l'évolution, si $V_e > 0$ l'évolution est une augmentation, si $V_e < 0$ l'évolution est une diminution, si $V_e = 0$ l'évolution est une stagnation.
- t : le taux d'évolution exprimé en pourcentage, si $t > 0$ l'évolution est une augmentation, si $t < 0$ l'évolution est une diminution, si $t = 0$ l'évolution est une stagnation.

Activité 3

1. Un prix est affiché à 12 €, durant les soldes, il baisse de 10% (de sa valeur).
2. Un prix est affiché à 10,8 €, il augmente de 10% (de sa valeur).

V_0	t	V_e	V_1
12	-10%		

(a) Déterminer V_e et V_1 .

(b) Donner deux calculs qui permettent de trouver V_1 .

V_0	t	V_e	V_1
10,8	10%		

(a) Déterminer V_e et V_1 .

(b) Donner deux calculs qui permettent de trouver V_1 .

3. Un prix subit une baisse de 10%, faut-il augmenter le nouveau prix de 10% pour retrouver le prix initial ?

Exemple

- Augmenter une valeur V_0 de 10% ($t = 10\% = 0,1$) revient à :

- ajouter au nombre V_0 le nombre $V_e = 10\% \times V_0 = 0,1V_0$,
on obtient $V_1 = V_0 + 10\% \times V_0$,

- on a ainsi $V_1 = (1 + 10\%)V_0 = 110\% \times V_0 = 1,1V_0$.

- Diminuer une valeur V_0 de 10% ($t = -10\% = -0,1$) revient à :

- ajouter au nombre V_0 le nombre $V_e = -10\% \times V_0 = -0,1 \times V_0$,
on obtient $V_1 = V_0 - 10\% \times V_0$,

- on a ainsi $V_1 = (1 - 10\%)V_0 = 90\% \times V_0 = 0,9V_0$.

Définition

d'une manière générale

Faire évoluer une valeur V_0 de t revient à prendre $(100\% + t)$ soit $1 + t$ de la valeur V_0 :

$$V_1 = V_0(1 + t)$$

Le coefficient $1 + t$ est appelé coefficient multiplicateur de l'évolution, on le note CM .

$$\begin{cases} CM = 1 + t \\ V_1 = V_0 \times CM \end{cases}$$

Propriétés

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0(1+t) \\ \Leftrightarrow V_0 &= \frac{V_1}{1+t} & (t \neq -1) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{V_1}{V_0} - 1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0} & (V_0 \neq 0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V_1 &= V_0 \cdot CM \\ \Leftrightarrow V_0 &= \frac{V_1}{CM} & (t \neq -1) \\ \Leftrightarrow CM &= \frac{V_1}{V_0} & (V_0 \neq 0) \\ \Leftrightarrow t &= CM - 1 = \frac{V_1}{V_0} - 1 & (V_0 \neq 0) \end{aligned}$$

Démonstration 1

Les calculs sont laissés à faire

Définition

- On appelle évolution relative le nombre ($V_0 \neq 0$) :

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = t$$

- On appelle évolution absolue le nombre :

$$V_1 - V_0 = V_e$$

Propriété

- $CM < 1$ ($CM < 100\%$) $\Leftrightarrow 1 + t < 1 \Leftrightarrow t < 0$, l'évolution est une diminution
- $CM = 1$ ($CM = 100\%$) $\Leftrightarrow 1 + t = 1 \Leftrightarrow t = 0$, l'évolution est une stagnation
- $CM > 1$ ($CM > 100\%$) $\Leftrightarrow 1 + t > 1 \Leftrightarrow t > 0$, l'évolution est une augmentation

Exercice 1

Avec les notations précédentes répondre aux questions suivantes.

- Dans chaque cas, déterminer par le calcul mental le coefficient multiplicateur :
 - $t = 20\%$
 - $t = -70\%$
 - $t = 100\%$
 - $t = -0,5$
 - $V_0 = 20 ; V_1 = 30$
- Dans chaque cas, déterminer par le calcul mental le taux d'évolution :
 - $CM = 20\%$
 - $CM = 0,3$
 - $CM = 3$
 - $CM = 1,005$
 - $V_0 = 50 ; V_1 = 20$

Exercice 2

Avec les notations précédentes, répondre aux questions suivantes :

- Dans chaque cas, déterminer la valeur V_1 :
 - $V_0 = 240$ et $t = 20\%$
 - $V_0 = 140$ et $CM = 0,7$
- Dans chaque cas, déterminer la valeur V_0 :
 - $V_1 = 80$ et $t = 20\%$
 - $V_1 = 14$ et $CM = 40\%$

Exercice 3

Pour un client, est-il préférable d'obtenir :

1. une promotion de 20%, soit 20% de produit en plus pour un même prix,
2. une baisse du prix sur le produit initial de 20%.

II. B. Évolution successive

Activité 4

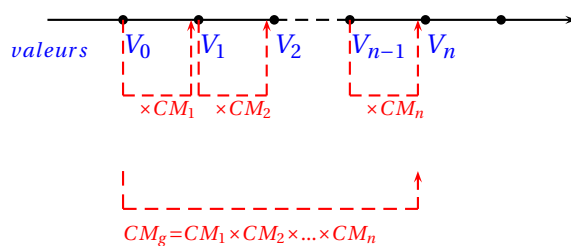
1. Un article coûte 50 €, son prix augmente successivement de 10% puis de 20%. Quel est le taux global de l'évolution soit le prix à l'issue des deux évolutions ?
2. Même question si le prix est de 100 €.
3. Prouver que le taux global de l'évolution est indépendant du prix initial.

Propriété

Soit une évolution successive de n taux t_1, t_2, \dots, t_n . On note CM_1, CM_2, \dots, CM_n les coefficients multiplicateurs associés, CM_{global} le coefficient multiplicateur global et t_{global} le taux global de l'évolution successive.

$$\begin{cases} CM_{global} = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n \\ t_{global} = CM_{global} - 1 \end{cases}$$

Schéma :



Exercice 4

Avec les notations précédentes, répondre aux questions suivantes.

Par le calcul mental, déterminer le taux global dans les cas suivants :

1. $CM_1 = 0,3$, $CM_2 = 0,2$ et $CM_3 = 0,5$,
2. $t_1 = -80\%$ et $t_2 = 40\%$.

Exercice 5

Pour un client, est-il préférable qu'un prix baisse deux fois successivement de 20% ou qu'il baisse une seule fois de 40% ? Justifier.

II. C. Évolution réciproque

Activité 5

1. Un article coûte 40 €, il augmente de 25%, quel taux successif faut-il appliquer pour obtenir le prix initial de 50 €?
2. Même question si l'article coûte 100 €.
3. Montrer que le taux cherché dans les questions 1 et 2 ne dépend pas du prix initial.

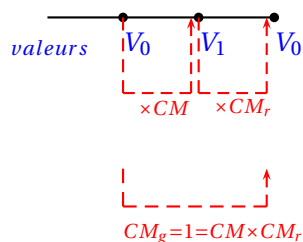
Propriété

Soit l'évolution d'une valeur V_0 décrite par un taux t , on cherche le taux t_r , appelé **taux réciproque** à appliquer à la suite de la précédente évolution pour obtenir la valeur initiale V_0 .

On notera CM le coefficient multiplicateur associé au taux t et CM_r le coefficient multiplicateur associé au taux t_r . On rappelle que $CM = 1 + t$.

$$CM \times CM_r = 1 \iff CM_r = \frac{1}{CM} \iff t_r = \frac{1}{CM} - 1.$$

Schéma :



Exercice 6

Avec les notations précédentes, répondre aux questions suivantes.

Par le calcul mental, déterminer le taux réciproque dans les cas suivants :

1. $t = 25\%$
2. $CM = 0,2$

Exercice 7

Le prix TTC d'un article est de 20 €. On rappelle que le taux d'évolution, soit le taux de la TVA est de 19,6% (pour information, 5,5% dans des cas particulier).

1. Calculer la prix HT de l'article, ainsi que le montant de la TVA.
2. Quel taux faut-il appliqué au prix TTC pour obtenir le prix HT ?

