Droites du plan

Table des Matières

Droites du plan

I. Équation cartésienne d'une droite

Activité 1

Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.
A et B sont deux points de coordonnées respectives $(2\,;\,-1)$ et $(3\,;\,1)$.
Expliquer pourquoi le point C de coordonnées $(4\,;\,3)$ est sur la droite (AB).

Théorème

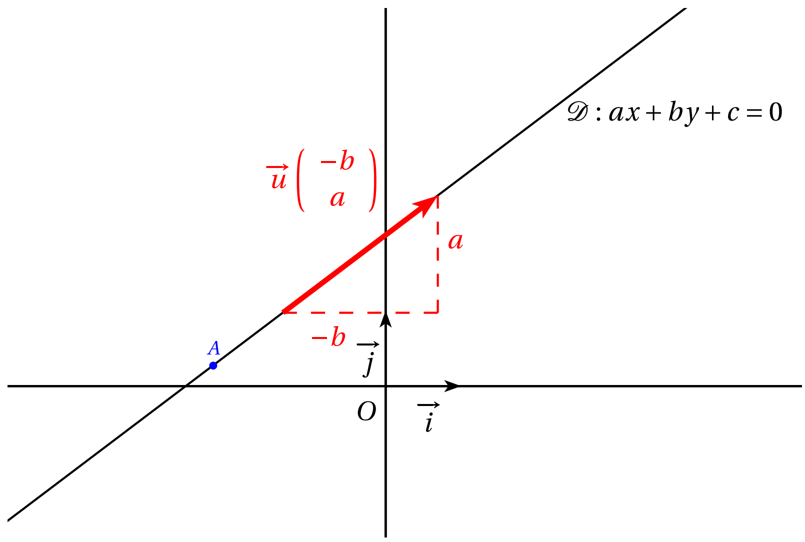
Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de coordonnées $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et un point A de coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$.

Tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ de la droite $\mathscr{D}$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ et passant par le point A vérifie :

$$u_2x-u_1y+u_1y_A-u_2x_A=0 \Longleftrightarrow u_2(x-x_A)-u_1(y-y_A)=0 \Longleftrightarrow u_1(y-y_A)=u_2(x-x_A)$$

Réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$ (a et b non tous les deux nuls), représente une droite $\mathscr{D}$ du plan dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.



☞**Démonstration 1**

1. Soit un vecteur $\vec{u}$ non nul de coordonnées $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et un point A de coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$.

   Soit un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ de la droite $\mathscr{D}$ dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et passant par le point A.

   (a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$?

   (b) En déduire les relations données.

2. Soit une équation (E) de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ (a et b non tous les deux nuls) et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

   (a) Le but de cette question est de montrer qu'il existe un couple $(x_A\ ;\ y_A)$ qui vérifie l'équation (E).

      i. *si* $a = 0$, que peut-on dire de b, en déduire un couple $(x_A\ ;\ y_A)$ qui vérifie l'équation (E).

      ii. *si* $b = 0$, que peut-on dire de a, en déduire un couple $(x_A\ ;\ y_A)$ qui vérifie l'équation (E).

      iii. *si* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$, on suppose x_A un réel donné, déterminer y_A puis le couple $(x_A\ ;\ y_A)$ qui vérifie l'équation (E).

   Soit un réel x_A donné. Montrer qu'il existe un réel y_A tel que le couple $(x_A\ ;\ y_A)$ vérifie l'équation (E). (on étudiera deux cas : $a = 0$ et $a \neq 0$).

   Il existe un point A dont les coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$ vérifient l'équation (E).

   (b) Montrer qu'un point M dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifie l'équation (E) vérifient l'équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

   (c) En déduire les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Définition

Soit un repère $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ du plan.
Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne d'une droite.

Remarques

Soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

- Si $a = 0$ alors $by + c = 0 \iff y = \dfrac{-c}{b}$ représente une équation d'une droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des abscisses, elle est dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\vec{i}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Si $b = 0$ alors $ax + c = 0 \iff x = \dfrac{-c}{a}$ représente une équation d'une droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées, elle est dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\vec{j}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque

Si une droite $\mathscr{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$ alors toutes équations de la forme $k(ax + by + c) = 0$ avec k réel non nul, est une équation de $\mathscr{D}$.
Une droite $\mathscr{D}$ peut avoir une infinité d'équation cartésienne qui la représente.

☞**Exercice 1**

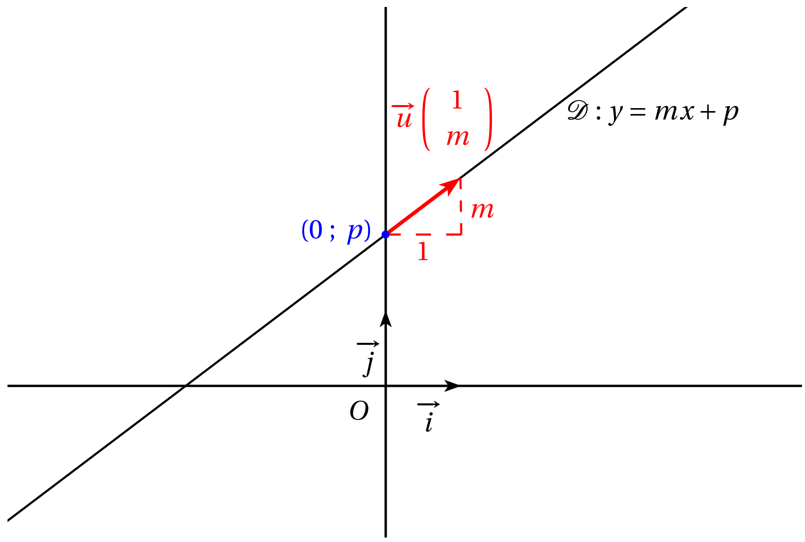
Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan. L'unité est le centimètre.

1. (a) Construire la droite $\mathcal{D}_1$ passant par le point A de coordonnées $(-1\,;\,2)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer une équations cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ dont une a des coefficients entiers.
   (c) En déduire deux autres équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}_1$ dont une a des coefficients entiers.
2. Construire la droite $\mathcal{D}_3$ d'équation $-4x+5y+3=0$.
3. Construire la droite d'équation $3x=2$.
4. Construire la droite d'équation $-5y=12$.

II. Équation réduite d'une droite

Théorème

Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation unique de la forme $y=mx+p$, où m et p sont deux nombres réels.
Réciproquement une équation de la forme $y=mx+p$ représente une droite du plan non parallèle à l'axe des abscisses.



☞**Démonstration 2**

1. Soit une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées, ainsi la droite $\mathcal{D}$, d'équation $ax+by+c=0$ (avec avec $(a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$), est dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ telle que $b\neq 0$.
   (a) Donner m et p pour que l'équation soit de la forme $y=mx+p$.
   (b) Déterminer l'unique vecteur $\overrightarrow{v}$ d'abscisse 1 colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$.

   Remarque : l'écriture $y=mx+p$ est unique.
2. Supposons une équation de la forme $y=mx+p$ (E'). Montrer que E' est l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Une équation de la forme $y = mx + p$ est appelée ***équation réduite*** d'une droite $\mathscr{D}$, m est appelé ***coefficient directeur*** **ou pente** et p est appelé ***ordonnée à l'origine***.

Propriété

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
À toute droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées on peut associer une fonction affine dont l'expression est de la forme $f(x) = mx + p$ avec m et p réels.

Remarques

- Soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx + p$.
  Si $m = 0$ alors l'équation est de la forme $y = p$, la droite est parallèles à l'axe des abscisses.
- Soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ et d'équation réduite $y = mx+p$, on a $m = \dfrac{-a}{b}$
  - $ax+by+c=0 \Longleftrightarrow by = -ax-c \Longleftrightarrow y = \dfrac{-a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ on a bien $m = \dfrac{-a}{b}$.
  - Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ dirigent la droite $\mathscr{D}$, ils sont donc colinéaires, par le calcul du déterminant on a
    $\begin{vmatrix} -b & 1 \\ a & m \end{vmatrix} = -bm - a = 0 \Longleftrightarrow m = \dfrac{-a}{b}$

Exercice 2

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan. L'unité est le centimètre.

1. (a) Construire la droite $\mathscr{D}_1$ passant par le point A de coordonnées $(-2\,;\,-3)$ et de pente $\dfrac{1}{3}$.
   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}_1$.
2. (a) Construire la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = 0,5x - 3$.
   (b) Donner deux équations cartésiennes de la droite $\mathscr{D}_2$ dont une a des coefficients entiers.
3. (a) Construire la droite $\mathscr{D}_3$ d'équation $7x + 3y + 9 = 0$.
   (b) Donner l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}_3$. Donner sa pente et son ordonnée à l'origine.

III. Équations d'une droite passant par deux points

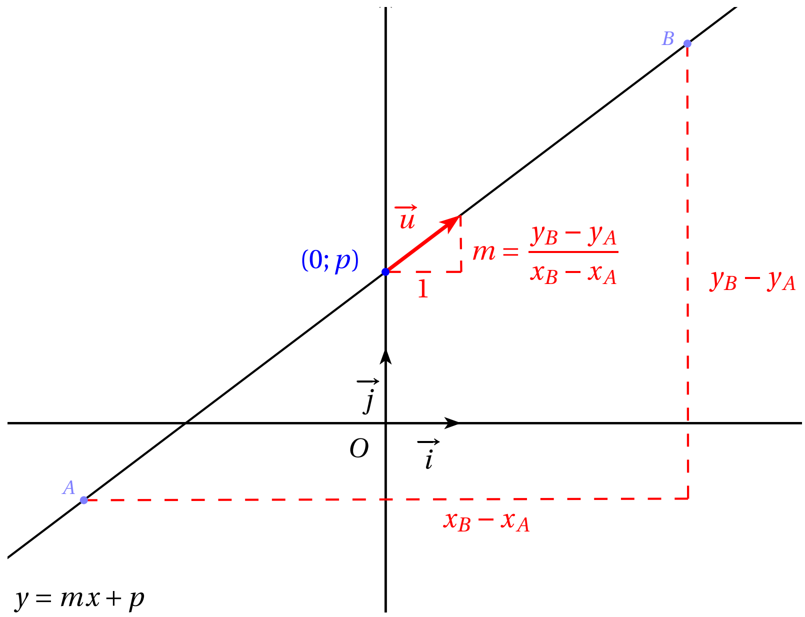
☞**Activité 2**

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Soient les points A et B de coordonnées respectives $(-1\,;\,4)$ et $(5\,;\,3)$.
Déterminer une équation de la droite (AB). Si l'équation choisie n'est pas réduite, donner l'équation réduite de la droite (AB).

Théorème

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Soient les points A et B de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.

- Si $x_A = x_B$ alors la droite (AB) a pour équation $x = x_A$.
- La droite (AB) a pour équation réduire $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (ou $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$) et pour ordonnée à l'origine $p = y_A - mx_A$ (ou $p = y_B - mx_B$).



☞**Démonstration 3**

Cas où $x_A \neq x_B$.
Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$.

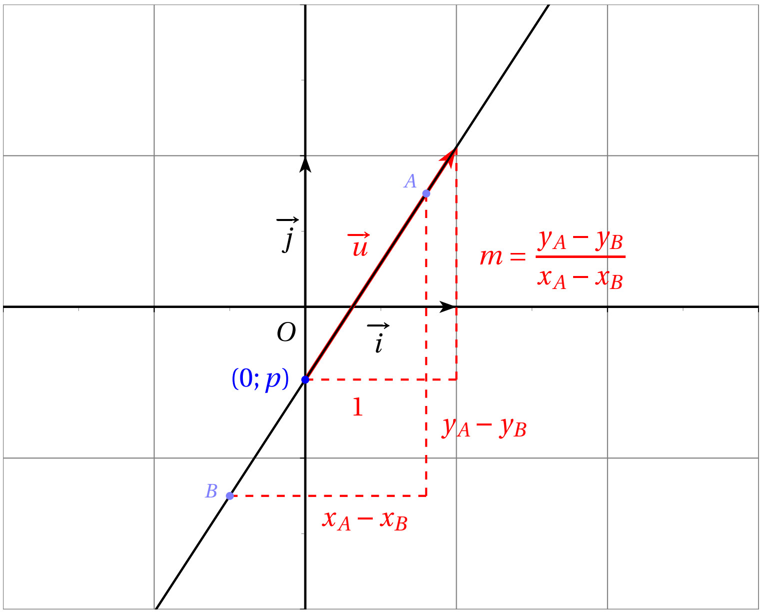
1. Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB).
2. Déterminer le vecteur d'abscisse 1 qui dirige la (AB).
3. En déduire l'équation réduite de la droite (AB).

☞**Exercice 3**

Soit un repère $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

Soient les points A et B de coordonnées respectives $\left(\frac{4}{5}\,;\ \frac{3}{4}\right)$ et $\left(\frac{-1}{2}\,;\ \frac{-5}{4}\right)$.

1. Montrer que la droite (AB) a pour équation réduite $y = \dfrac{20x - 6,25}{13}$. Donner le coefficient directeur de la droite et son ordonnée à l'origine.
2. Justifier les points C de coordonnées $\left(\frac{13}{16}\,;\ \frac{10}{13}\right)$ est sur la droite (AB).
3. Justifier que le point D de coordonnées $(-1\,;\ -2)$ n'est pas sur la droite (AB).
4. Que penser de la lecture graphique ?



☞**Exercice 4**

Lire les deux items avant de commencer l'exercice.

- Le prix d'un article était de 41 €en 2 000 et 50 €en 2 018. On considère que l'augmentation annuelle a été constante.
  Quel sera le prix de l'article en 2 030 ?
- Soit $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan.
  Soient les points A, B de coordonnées respectives $(0\,;\ 41)$ et $(18\,;\ 50)$.
  Déterminer l'ordonnée du point C d'abscisse 30.

Résoudre le problème de votre choix.