Droites du plan

Table des Matières

☙✿ Droites du plan ✿❧

I. Équations d'une droite

I. A. Équation cartésienne d'une droite

☞**Activité 1**

Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.
A et B sont deux points de coordonnées respectives $(2\,;\,-1)$ et $(3\,;\,1)$.
Expliquer pourquoi le point C de coordonnées $(4\,;\,3)$ est sur la droite (AB).

Théorème

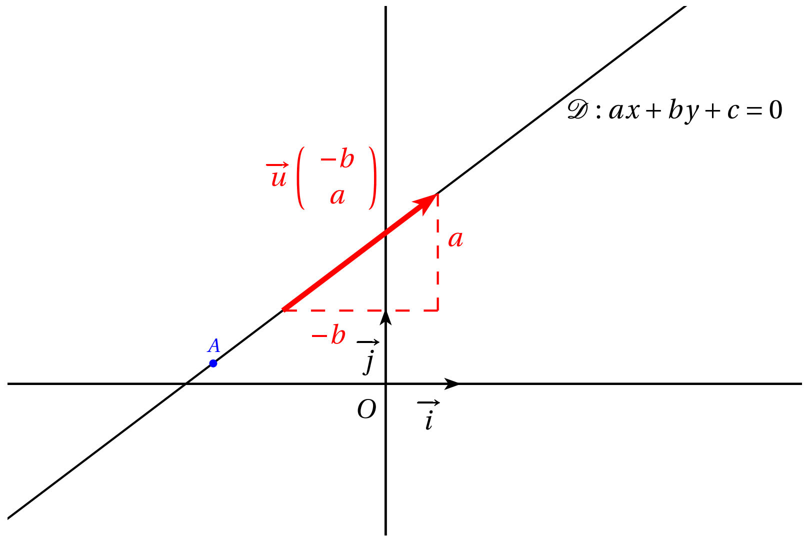
Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de coordonnées $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et un point A de coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$.

Tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ de la droite $\mathscr{D}$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ et passant par le point A vérifie :

$$u_2x-u_1y+u_1y_A-u_2x_A=0 \Longleftrightarrow u_2(x-x_A)-u_1(y-y_A)=0 \Longleftrightarrow u_1(y-y_A)=u_2(x-x_A)$$

Réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$ (a et b non tous les deux nuls), représente une droite $\mathscr{D}$ du plan dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.



☞**Démonstration 1**

1. Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de coordonnées $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et un point A de coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$.

   Soit un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ de la droite $\mathscr{D}$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ et passant par le point A.

   (a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$?

   (b) En déduire les relations données.

2. Soit une équation (E) de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ (a et b non tous les deux nuls) et le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

   (a) Soit un réel x_A donné. Montrer qu'il existe un réel y_A tel que le couple $(x_A\ ;\ y_A)$ vérifie l'équation (E). (on étudiera deux cas : $a=0$ et $a \neq 0$).

   Il existe un point A dont les coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$ vérifient l'équation (E).

   (b) Montrer qu'un point M dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'équation (E) vérifient l'équation $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

   (c) En déduire les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

Définition

Soit un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Une équation de la forme $ax+by+c=0$ est appelée équation cartésienne d'une droite.

Remarques

Soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

- Si $a=0$ alors $by+c=0 \iff y=\dfrac{-c}{b}$ représente une équation d'une droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des abscisses, elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{i}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Si $b=0$ alors $ax+c=0 \iff x=\dfrac{-c}{a}$ représente une équation d'une droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées, elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{j}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque

Si une droite $\mathscr{D}$ a pour équation $ax+by+c=0$ alors toutes équations de la forme $k(ax+by+c)=0$ avec k réel non nul, est une équation de $\mathscr{D}$.
Une droite $\mathscr{D}$ peut avoir une infinité d'équation cartésienne qui la représente.

☞**Exercice 1**

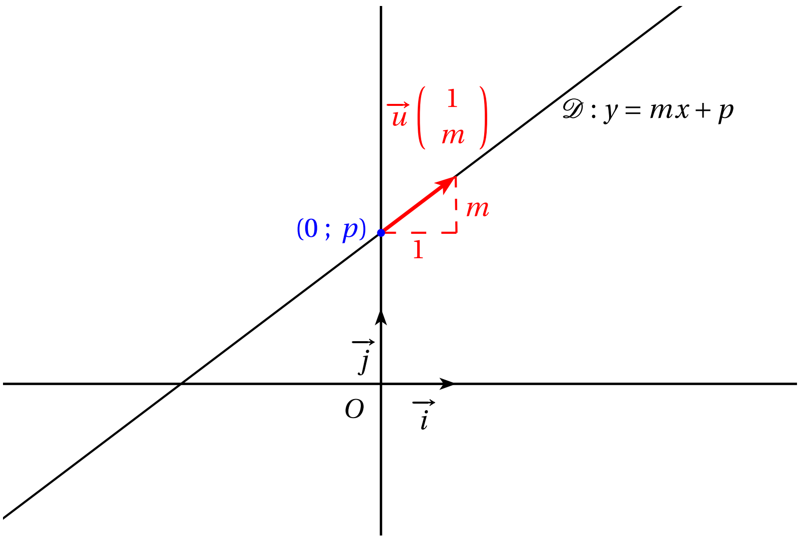
Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan. L'unité est le centimètre.

1. (a) Construire la droite $\mathscr{D}_1$ passant par le point A de coordonnées $(-1\,;\,2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Donner deux équations cartésiennes de la droite $\mathscr{D}_1$ dont une a des coefficients entiers.
2. Construire la droite $\mathscr{D}_3$ d'équation $-4x+5y+3=0$.
3. Construire la droite d'équation $3x=2$.
4. Construire la droite d'équation $-5y=12$.

I. B. Équation réduite d'une droite

Théorème

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Une droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation unique de la forme $y=mx+p$, où m et p sont deux nombres réels.
Réciproquement une équation de la forme $y=mx+p$ représente une droite du plan non parallèle à l'axe des abscisses.



☞**Démonstration 2**

1. Soit une droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des abscisses.
   (a) Justifier que la droite $\mathscr{D}$ est dirigée par un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ avec $(u_1\,;\,u_2)\neq(0\,;\,0)$ tel que $u_1\neq 0$.
   (b) Déterminer l'unique vecteur $\vec{v}$ d'abscisse 1 colinéaire au vecteur $\vec{u}$.
   (c) En déduire une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$.
   (d) Donner m et p pour que l'équation soit de la forme $y=mx+p$.

   On admet que l'écriture $y=mx+p$ est unique.
2. Supposons une équation de la forme $y=mx+p$ (E'). Donner l'équation cartésienne (E) équivalente à l'équation (E'), en déduire que l'équation (E') est celle d'une droite $\mathscr{D}$ dirigée par une vecteur $\vec{u}$ à déterminer.

✒ Définition

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Une équation de la forme $y = mx + p$ est appelée ***équation réduite*** d'une droite $\mathscr{D}$, m est appelé ***coefficient directeur* ou pente** et p est appelé ***ordonnée à l'origine***.

✒ Propriété

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
À toute droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées on peut associer une fonction affine dont l'expression est de la forme $f(x) = mx + p$ avec m et p réels.

✒ Remarques

- Soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx + p$.
  Si $m = 0$ alors l'équation est de la forme $y = p$, la droite est parallèles à l'axe des abscisses.

- Soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et d'équation réduite $y = mx + p$, on a $m = \dfrac{a}{-b}$
  - $ax + by + c = 0 \Longleftrightarrow by = -ax - c \Longleftrightarrow y = \dfrac{-a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ on a bien $m = \dfrac{a}{-b}$.
  - Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ dirigent la droite $\mathscr{D}$, ils sont donc colinéaires, par le calcul du déterminant on a
    $\begin{vmatrix} -b & 1 \\ a & m \end{vmatrix} = -bm - a = 0 \Longleftrightarrow m = \dfrac{a}{-b}$

☞Exercice 2

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan. L'unité est le centimètre.

1. (a) Construire la droite $\mathscr{D}_1$ passant par le point A de coordonnées $(-2\,;\,-3)$ et de pente $\dfrac{1}{3}$.
   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}_1$.
2. (a) Construire la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = 0,5x - 3$.
   (b) Donner deux équations cartésiennes de la droite $\mathscr{D}_2$ dont une a des coefficients entiers.
3. (a) Construire la droite $\mathscr{D}_3$ d'équation $7x + 3y + 9 = 0$.
   (b) Donner l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}_3$. Donner sa pente et son ordonnée à l'origine.

I. C. Équations d'une droite passant par deux points

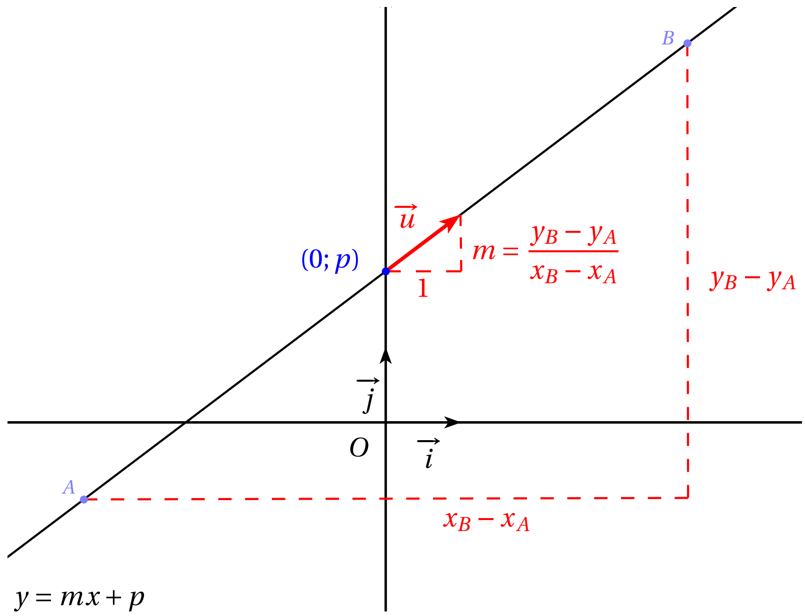
☞Activité 2

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Soient les points A et B de coordonnées respectives $(-1\,;\,4)$ et $(5\,;\,3)$.
Déterminer une équation de la droite (AB). Si l'équation choisie n'est pas réduite, donner l'équation réduite de la droite (AB).

Théorème

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Soient les points A et B de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.

- Si $x_A = x_B$ alors la droite (AB) a pour équation $x = x_A$.
- La droite (AB) a pour équation réduire $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (ou $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$) et pour ordonnée à l'origine $p = y_A - mx_A$ (ou $p = y_B - mx_B$).



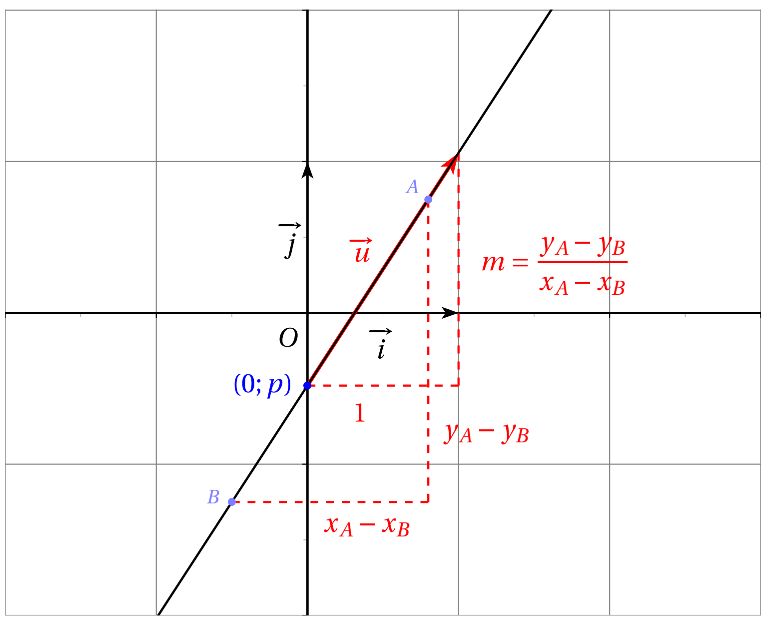
Démonstration 3

Cas où $x_A \neq x_B$.
Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$.

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB).
2. Déterminer le vecteur d'abscisse 1 qui dirige la (AB).
3. En déduire l'équation réduite de la droite (AB).

Exercice 3

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
Soient les points A et B de coordonnées respectives $\left(\dfrac{4}{5}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$ et $\left(\dfrac{-3}{4}\,;\,\dfrac{-5}{4}\right)$.
Justifier si les points C de coordonnées $\left(\dfrac{13}{16}\,;\,\dfrac{10}{13}\right)$ et D de coordonnées $(-1\,;\,-2)$ sont sur la droite (AB).



☞**Exercice 4**

Lire les deux items avant de commencer l'exercice.

- Le prix d'un article était de 41 €en 2 000 et 59 €en 2 018. On considère que l'augmentation annuelle a été constante.
  Quel sera le prix de l'article en 2 030 ?
- Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ un repère du plan.
  Soient les points A, B de coordonnées respectives $(2000\,;\,41)$ et $(2018\,;\,59)$.
  Déterminer l'ordonnée du point C d'abscisse 2030.

Résoudre le problème de votre choix.

II. application aux positions relatives de deux droites dans le plan

II. A. Droites parallèles du plan

☞**Activité 3**

Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation respective $y = 0,5x - 3$ et $x - 2y + 5 = 0$.
Que pouvez-vous dire de ces deux droites ?

Théorème

Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Soient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation cartésienne respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ et $(a'\,;\,b') \neq (0\,;\,0)$.
Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$.

☞**Démonstration 4**

1. Déterminer un vecteur directeur pour chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
2. En déduire le résultat du théorème.

☞**Exercice 5**

Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.

1. Dire si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation cartésienne respective $2x + 3y + 5 = 0$ et $-x + \frac{-3}{2}y - 1 = 0$ sont parallèles en calculant le déterminant associé.
2. Dire si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation cartésienne respective $x + \frac{y}{2} - 1 = 0$ et $4x + y - 1 = 0$ sont parallèles en calculant le déterminant associé.

II. B. Systèmes linaires de deux équations à deux inconnues

Définition

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y, un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. .$$

ou de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & d \\ a'x+b'y & = & d' \end{array}\right. .$$

avec a, b, c et d des nombres réels.
Le(s) éventuelle(s) solution(s) d'un tel système sont des couples de nombres réels $(x\ ;\ y)$ qui vérifient chacune des deux équations.

Exemple

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -1 \\ 3x-2y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le couple $(2\ ;\ 3)$ est solution du système alors que le couple $(-1\ ;\ 0)$ n'est pas solution du système.

Propriétés

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. .$$

On a les règles de calculs suivantes :

- On peut multiplier chaque équation par un réel k et k' non nuls :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} kax+kby+kc & = & 0 \\ k'a'x+k'b'y+k'c' & = & 0 \end{array}\right.$$

- On peut ajouter (ou soustraire) deux équations d'un système en gardant une équation initiale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ (a+a')x+(b+b')y+(c+c') & = & 0 \end{array}\right.$$

Théorème

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+c & = & 0 \\ a'x+b'y+c' & = & 0 \end{array}\right. .$$

- si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ alors le système a soit aucune solution soit une infinité de couples solutions.
- si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ alors le système possède un unique couple solution.

Démonstration 5

Ce théorème est la conséquence de la démonstration 4 avec la particularité que si deux droites sont confondues, elles sont parallèles et elles ont la même équation cartésienne à un coefficient réel près.

✒ **Remarque**

Dans le cas d'une unique solution, le couple solution sont les coordonnées du point des deux droites associées aux équations du système.

✒ **Exemple**

Soit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5-3\times1\neq0.$

Le système admet donc un unique couple solution.

Résolution par substitution (on substitue une inconnue dans le deuxième) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ 3x+5(-2x-1)-4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ 3x-10x-5-4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ -7x & = & 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2\times\dfrac{-9}{7}-1 \\ x & = & \dfrac{-9}{7} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{4}{7} \\ x & = & \dfrac{-9}{7} \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est le couple $\left(\dfrac{-9}{7}\,;\,\dfrac{4}{7}\right)$

✒ **Exemple**

Soit le système (le même que le précédent)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Résolution par combinaison (on utilise les règles opératoires sur les systèmes) :

- On multiplie la première équation par -5 dans le but de ne plus avoir l'inconnue y et de trouver x :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -10x-5y-5 & = & 0 \\ 3x+5y-4 & = & 0 \end{array}\right.$$

- On garde la première équation simplifiée, on ajoute les deux équations membre à membre du système précédent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+1 & = & 0 \\ -7x-9 & = & 0 \end{array}\right.$$

- On finit la résolution en prévoyant de trouver y à partir de la première équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x-1 \\ x & = & \dfrac{-9}{7} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2\times\dfrac{-9}{7}-1 \\ x & = & \dfrac{-9}{7} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{-9}{7} \\ y & = & \dfrac{4}{7} \end{array}\right.$$

L'unique solution du système est le couple $\left(\dfrac{-9}{7}\,;\,\dfrac{4}{7}\right)$

☞**Exercice 6**

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.

Déterminer la position relative et le point d'intersection le cas échéant, des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équation respective $-3x+2y-1=0$ et $5x-4y+3=0$.

Faire une figure pour vérifier les résultats.