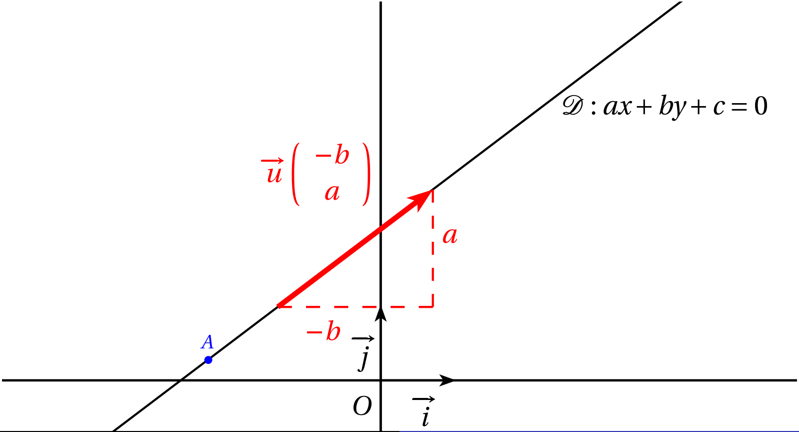
Équation cartésienne d'une droite

Stéphane Mirbel

Équation cartésienne

Soit un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\,,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Toute équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a\,;\ b)\neq(0\,;\ 0)$ (a et b non tous les deux nuls), représente une droite $\mathscr{D}$ du plan dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$.



Équation cartésienne : tracer une droite - exemple

Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Tracer le droite d'équation $2x-3y+2=0$.

On reconnait l'équation cartésienne d'une droite $a=2$; $b=-3$ et $c=2$.
Deux méthodes pour tracer la droite :

- Détermination des coordonnées de deux points (trois pour la précision) :
  On choisit $x=-1$, l'équation devient $2\times(-1)-3y+2=0$ soit $3y=0$ soit $y=\dfrac{0}{3}=0$.
  La droite passe par le point A de coordonnées $(-1\,;\,0)$. on choisit $x=2$, l'équation devient $2\times 2-3y+2=0$ soit $-3y=-6$ soit $y=\dfrac{-6}{-3}=2$.
  La droite passe par le point B de coordonnées $(2\,;\,2)$.

Équation cartésienne : tracer une droite - exemple

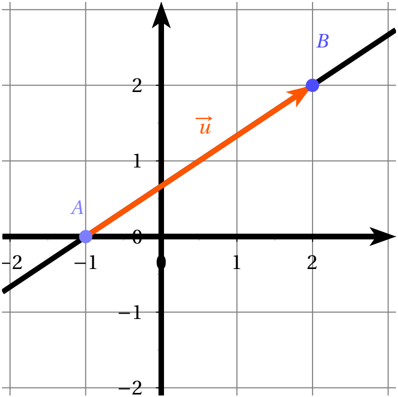
Soit un repère $\left(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Tracer le droite d'équation $2x - 3y + 2 = 0$.

On reconnait l'équation cartésienne d'une droite $a = 2$; $b = -3$ et $c = 2$.
Deux méthodes pour tracer la droite :

- Détermination des coordonnées d'un seul point et d'un vecteur directeur de la droite :
  On choisit $x = -1$, l'équation devient $2 \times (-1) - 3y + 2 = 0$ soit $3y = 0$ soit $y = \dfrac{0}{3} = 0$.
  La droite passe par le point A de coordonnées $(-1\ ;\ 0)$.
  La droite est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
  soit de coordonnées $\begin{pmatrix} -(-3) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$2x - 3y + 2 = 0$:

Méthode 1	Méthode 2
Point $A(-1\ ;\ 0)$ Point $B(2\ ;\ 2)$	Point $A(-1\ ;\ 0)$ vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$



Équation cartésienne : Déterminer une équation - exemple

Soit un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan, les points A et B de coordonnées respectives $(1\ ;\ -3)$ et $(4\ ;\ 2)$.

Deux méthodes possibles :

- On cherche une équation de la forme $ax + by + c = 0$.
  Un vecteur directeur de la droite est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
  $a = 5$ et $-b = 3$ soit $b = -3$.
  L'équation devient $5x - 3y + c = 0$.
  Les cordonnées du point A (ou B) vérifient l'équation :
  $5 \times 1 - 3 \times (-3) + c = 0$ donne $c = -14$.
  Une équation de la droite (AB) est $5x - 3y - 14 = 0$.

Équation cartésienne : Déterminer une équation - exemple

Soit un repère $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ du plan, les points A et B de coordonnées respectives $(1\,;\ -3)$ et $(4\,;\ 2)$.

Deux méthodes possibles :

- Un vecteur directeur de la droite est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

  Le point M de coordonnées $(x\,;\ y)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \end{pmatrix}$.

  M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires c'est à dire

  $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AM}\right) = \begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ 5 & y+3 \end{vmatrix} = 3(y+3)-5(x-1) = 0$

  On obtient une équation cartésienne de la droite (AB) :

  $3(y+3)-5(x-1) = 0$ soit $-5x+3y+9+5 = 0$ soit

  $-5x+3y+14 = 0$.

FIN