Fonction, représentation graphique d'une fonction

Table des Matières

Fonction, représentation graphique d'une fonction

I. Introduction historique

Activité 1

Le mathématicien allemand DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805-1859), donne l'exemple d'une nouvelle fonction nommée fonction caractéristique des irrationnels. Elle prend la valeur 0 si x est rationnel (si le nombre s'écrit $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers relatifs, b est non nul) et 1 sinon.
Notons f la fonction caractéristique des irrationnels.

1. Donner l'image des nombres suivants par la fonction f : -1, 0, $\frac{1}{3}$, π, $\sqrt{2}$.

2. Donner deux nombres différents de ceux de la question précédente qui ont pour image 1.

II. Fonction et courbe d'une fonction

Définition

Soit un ensemble $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}$.
À tout nombre x de l'ensemble $\mathbb{E}$ on associe un unique nombre réel y, cette mise en association est appelée fonction.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

- Le nombre y égale à $f(x)$ est appelé image du nombre x par la fonction f.
- Le(s) nombre(s) x tel que $f(x) = y$ est appelé antécédent du nombre y par la fonction f.
- L'ensemble $\mathbb{E}$ est appelé domaine de définition de la fonction f.
- Si $\mathbb{E} = \mathbb{N}$ alors la fonction f est généralement notée u et on l'appelle suite.

Définition

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{E}$ et $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ (graphe) de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ avec x prenant toutes les valeurs réelles de $\mathbb{E}$ et $y = f(x)$.
L'équation de la courbe $\mathscr{C}$ est $y = f(x)$.

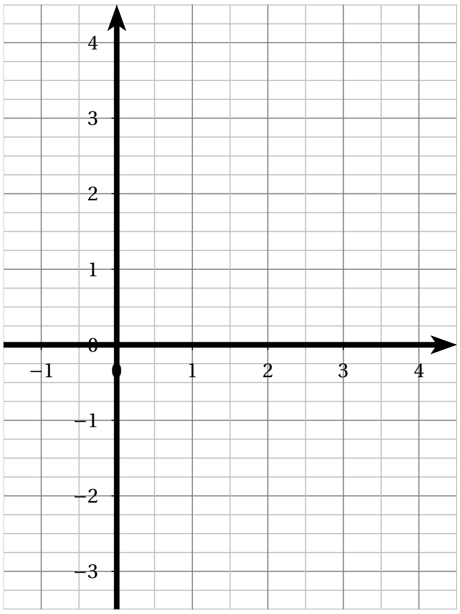
Remarque

Dans le cas où $\mathbb{E}$ est un intervalle réel, la courbe $\mathscr{C}$ contient une infinité de points, pour en donner l'allure on relie quelques points dont certains sont des points particuliers.

☞**Exercice 1**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 3x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer l'image de 1 par la fonction f. En déduire un point de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Il existe un nombre infini de points de la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer les coordonnées d'un autre point de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Est-ce que le point de coordonnées $(-0,5\ ;\ -0,75)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$? Justifier par un calcul d'image.
4. Est-ce que le point de coordonnées $(0,5\ ;\ 2,5)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$? Justifier par un calcul d'image.
5. Quelle est l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse $3,5$?
6. En remarquant l'unité choisie dans le repère ci-contre, faire un tableau de valeurs prises dans l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ qui permettrait de construire la courbe $\mathscr{C}$ à partir de 11 points.
7. Placer les points du tableau de valeurs précédent. Puis construire la courbe $\mathscr{C}$.



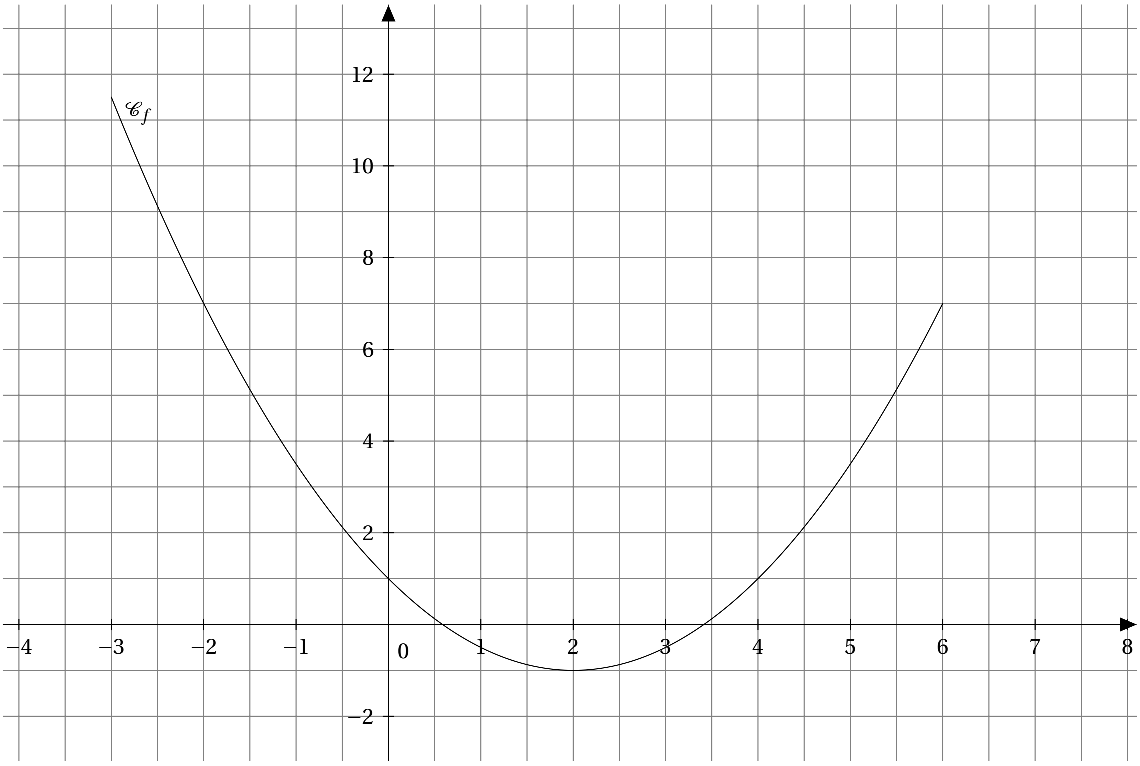
III. Résolution graphique d'équations

III. A. Équation $f(x) = k$ ou $f(x) - k = 0$

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à trouver les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est k .

☞**Exercice 2**

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.



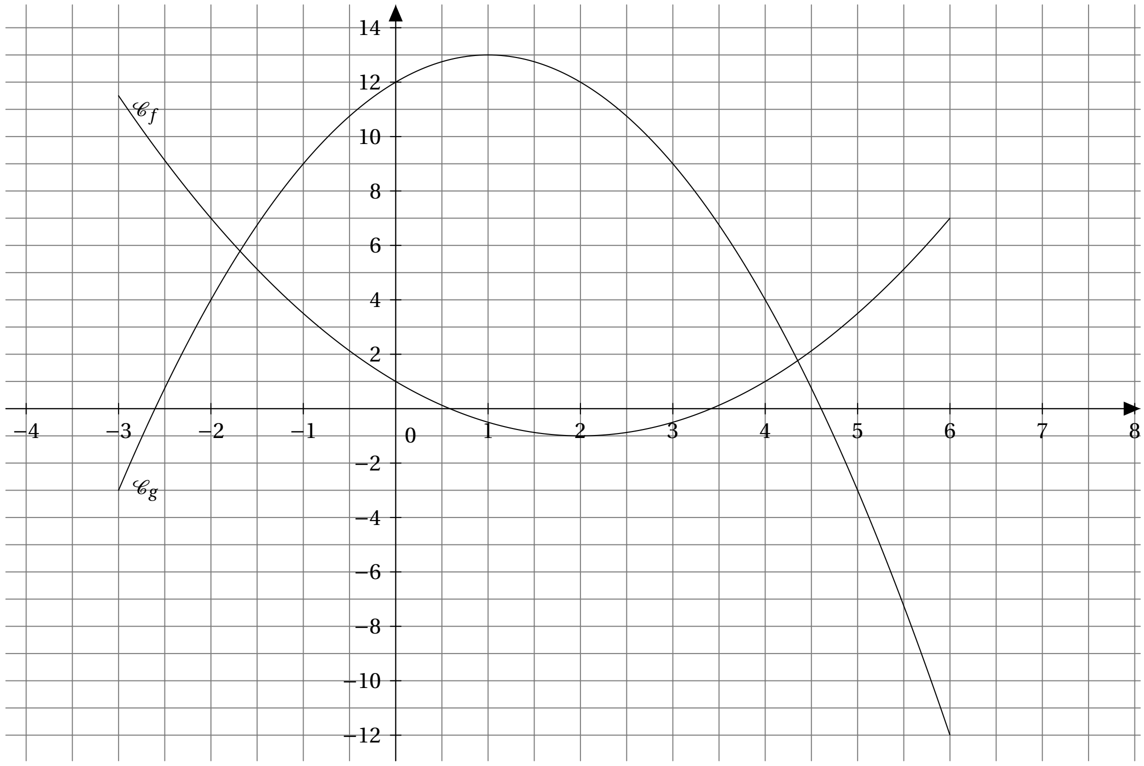
Résoudre graphiquement (vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique) : $f(x) = 7$; $f(x) = -1$; $f(x) = 10$; $f(x) = 0$; $f(x) = 12$.

III. B. Équation $f(x) = g(x)$ ou $f(x) - g(x) = 0$

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à trouver les abscisses x des points M d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

☞**Exercice 3**

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.



Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.(vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique).

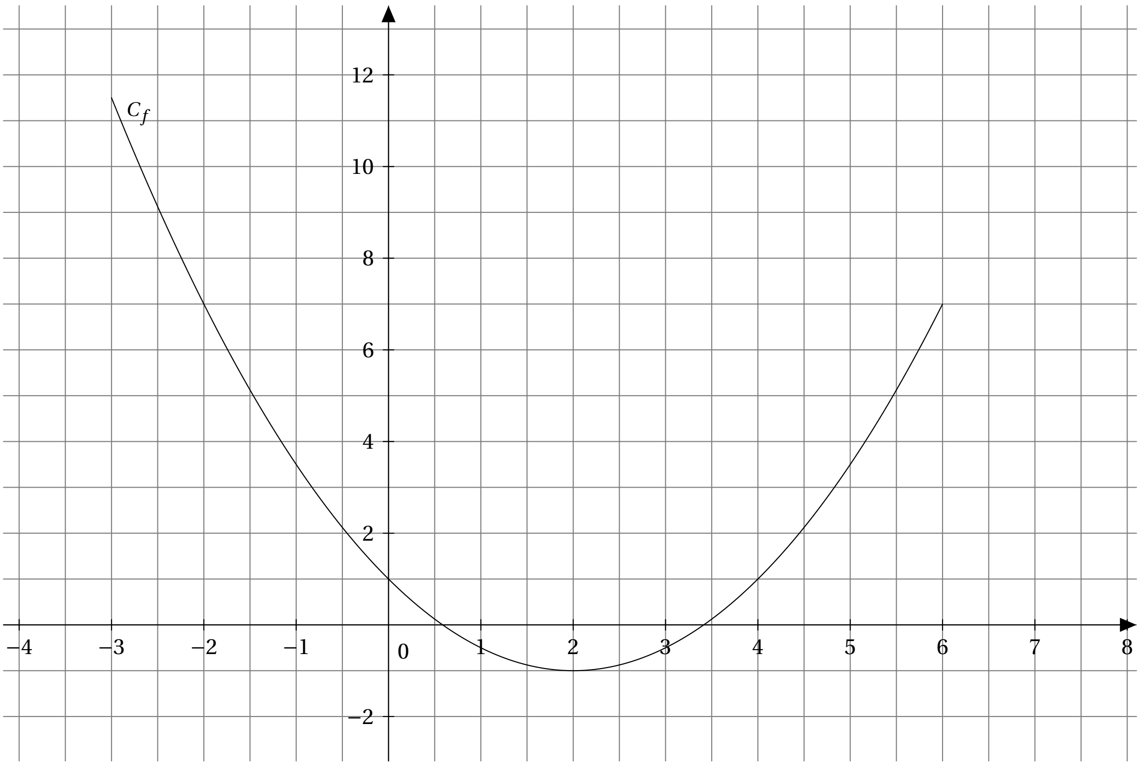
IV. Résolution graphique d'inéquations

IV. A. Inéquation $f(x) < k$ ou $f(x) - k < 0$ (ou $f(x) > k$ ou $f(x) - k > 0$)

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ revient à trouver les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est inférieure à k .
On construira une phrase de lecture analogue pour les inéquations du type $f(x) \leq k$; $f(x) > k$ et $f(x) \geq k$.

☞**Exercice 4**

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.



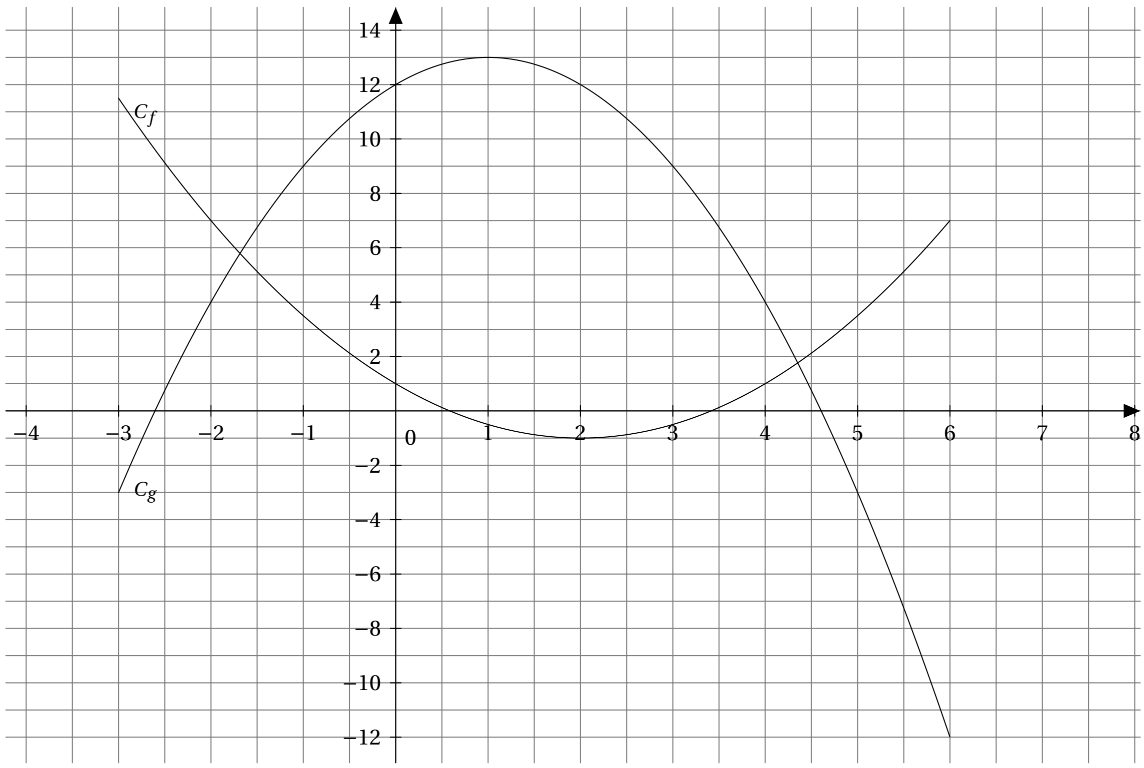
Résoudre graphiquement (vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique) : $f(x) < 7$; $f(x) \geq -1$; $f(x) \leq 10$; $f(x) > 0$; $f(x) > 12$.

IV. B. Inéquation $f(x) < g(x)$ ou $f(x) - g(x) < 0$ (ou $f(x) > g(x)$ ou $f(x) - g(x) > 0$)

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ revient à trouver les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée (pour une même abscisse x) est inférieure à celle d'un point M' de la courbe $\mathscr{C}_g$.

☞**Exercice 5**

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.



Résoudre graphiquement(vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique) : $f(x) < g(x)$; $f(x) \geq g(x)$.