Fonction, représentation graphique d'une fonction

Table des Matières

Fonction, représentation graphique d'une fonction

I. Introduction historique

Activité 1

Le mathématicien allemand DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805-1859), donne l'exemple d'une nouvelle fonction nommée fonction caractéristique des irrationnels. Elle prend la valeur 0 si x est rationnel (si le nombre s'écrit $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers relatifs, b est non nul) et 1 sinon.
Notons f la fonction caractéristique des irrationnels.

1. Donner l'image des nombres suivants par la fonction f : -1, 0, $\frac{1}{3}$, π, $\sqrt{2}$.
2. Donner deux nombres différents de ceux de la question précédente qui ont pour image 1.

II. Fonction et courbe d'une fonction

Définition

Soit un ensemble $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}$.
À tout nombre x de l'ensemble $\mathbb{E}$ on associe un unique nombre réel y, cette mise en association est appelée fonction.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

- Le nombre y égale à $f(x)$ est appelé image du nombre x par la fonction f.
- Le(s) nombre(s) x tel que $f(x) = y$ est appelé antécédent du nombre y par la fonction f.
- L'ensemble $\mathbb{E}$ est appelé domaine de définition de la fonction f.
- Si $\mathbb{E} = \mathbb{N}$ alors la fonction f est généralement notée u et on l'appelle suite.

Définition

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{E}$ et $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ (graphe) de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ avec x prenant toutes les valeurs réelles de $\mathbb{E}$ et $y = f(x)$.
L'équation de la courbe $\mathscr{C}$ est $y = f(x)$.

Remarque

Dans le cas où $\mathbb{E}$ est un intervalle réel, la courbe $\mathscr{C}$ contient une infinité de points, pour en donner l'allure on relie quelques points dont certains sont des points particuliers.

☞**Exercice 1**

Au XVII ^{e} siècle Galilée démontre que objet sans vitesse initiale, en chute libre possède une vitesse proportionnelle au temps de la chute.

Ainsi $f(t) = -\frac{1}{2} \times gt^2 + h$ avec $g = 9{,}81 \text{m.s}^{-1}$ et h est la hauteur exprimée en mètre de l'objet à l'instant initial, $f(t)$ décrit la hauteur de l'objet, exprimée en mètre, au temps t exprimée en seconde.

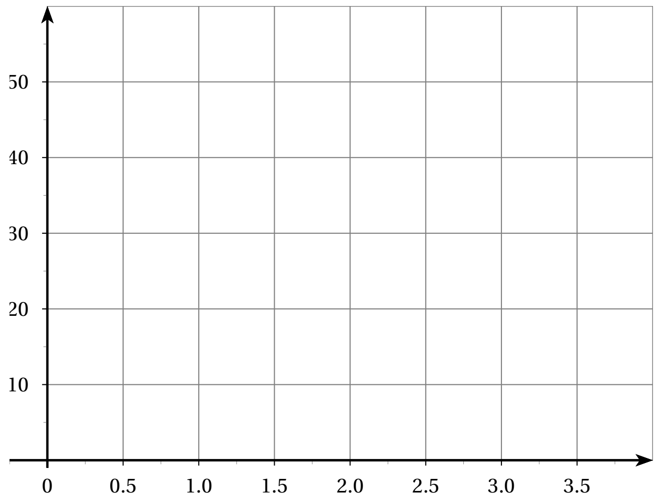
Si on lance l'objet depuis le haut de la tour de Pise (Italie) $h = 53$, on a $f(t) = -4{,}905t^2 + 53$.

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivants :

t	0	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(t)$							

2. Quel domaine de définition de la fonction f peut-on raisonnablement choisir ?

3. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f.



III. Résolution graphique d'équations

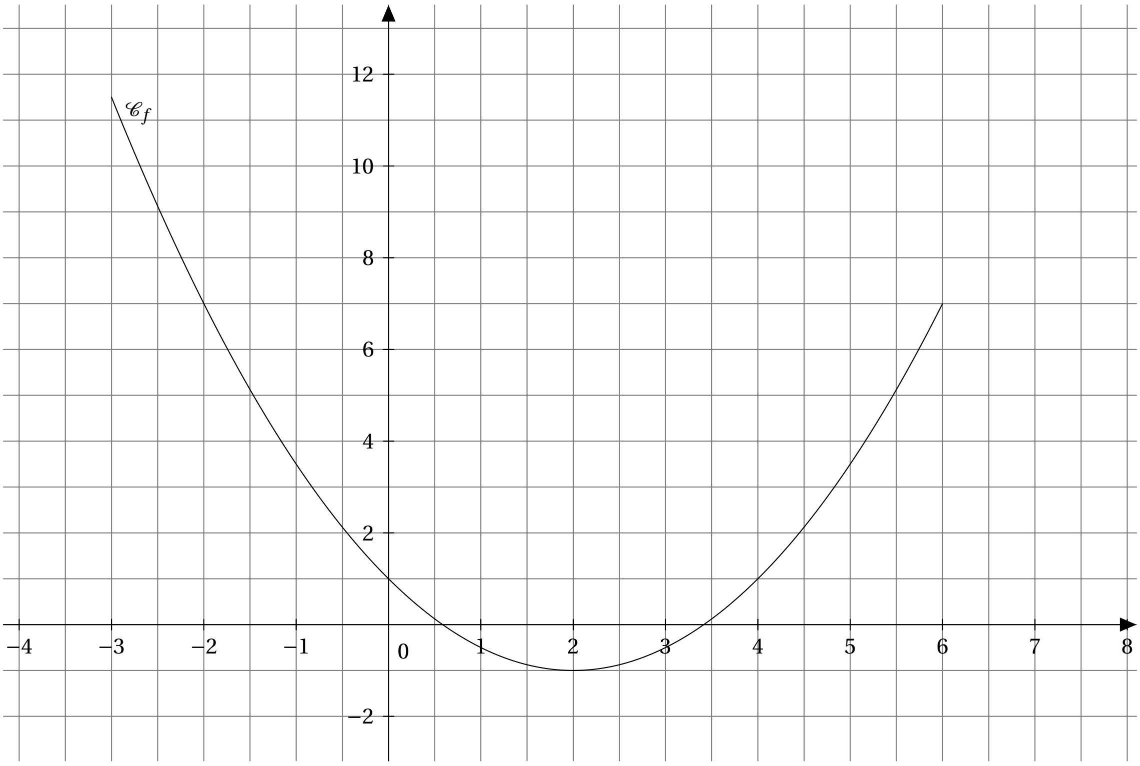
III. A. Équation $f(x) = k$ ou $f(x) - k = 0$

III. A. 1. Résolution graphique

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à trouver les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est k .

☞**Exercice 2**

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.



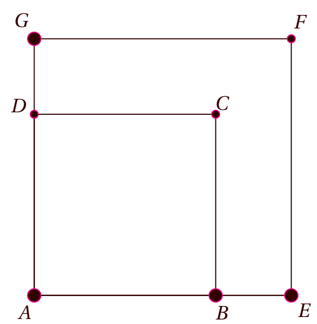
Résoudre graphiquement (vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique) : $f(x) = 7$; $f(x) = -1$; $f(x) = 10$; $f(x) = 0$; $f(x) = 12$.

III. A. 2. Résolution Algébrique d'équation linéaire

☞**Exercice 3**

L'unité est le centimètre.
Soit un carré $ABCD$ de côté x et un carré de $AEFG$ tel que $B \in [AE]$ et $D \in [AG]$ et $BE = DG = 1$.
Le but de l'exercice est de déterminer x pour que l'aire du polygone $DCBEFG$ soit de 6 cm^2.

1. Dans quel intervalle varie la longueur x ?
2. Soit f la fonction qui décrit l'aire du polygone $DCBEFG$.
   Exprimer, développer et réduire $f(x)$.
3. Dans un repère orthogonal, tracer la courbe de la fonction f.
4. Répondre au problème algébriquement et vérifier graphiquement votre solution.



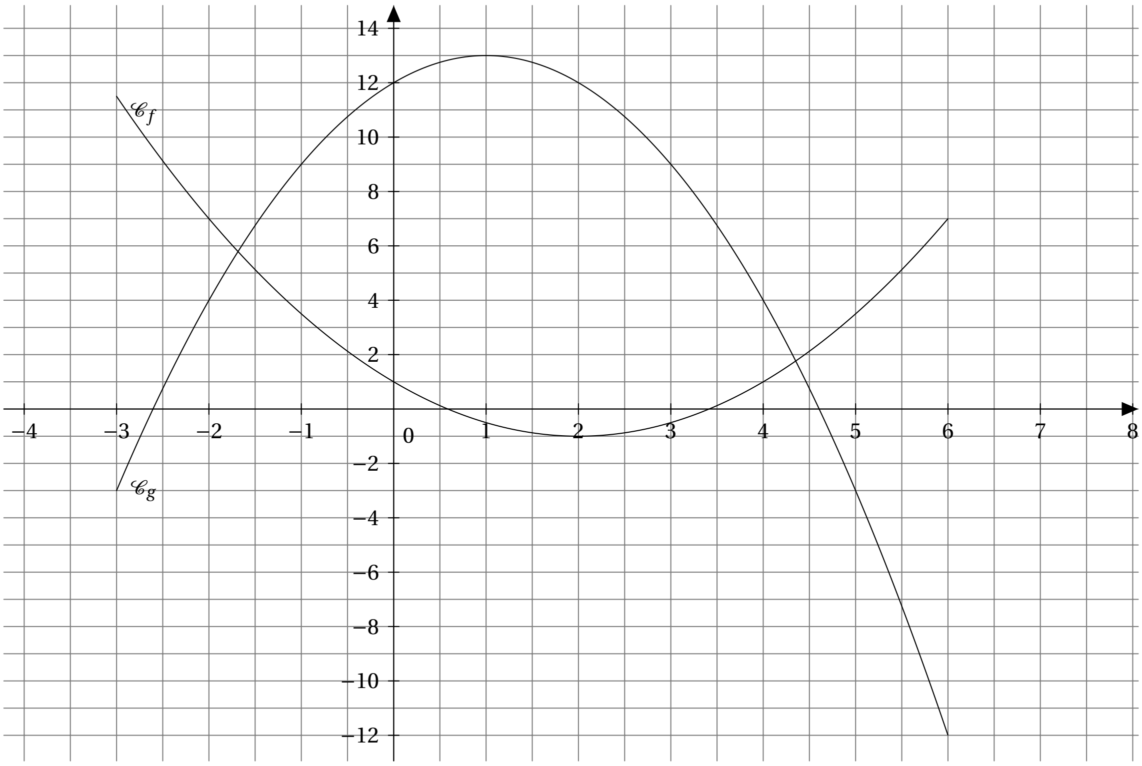
III. B. Équation $f(x) = g(x)$ ou $f(x) - g(x) = 0$

III. B. 1. Résolution graphique

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à trouver les abscisses x des points M d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

☞**Exercice 4**

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.



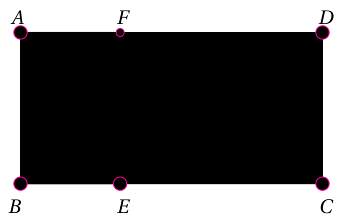
Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.(vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique).

III. B. 2. Résolution Algébrique d'équation linéaire

☞**Exercice 5**

$ABCD$ est un rectangle de côté $AB = 2$ et $BC = 4$ (unité de longueur).
$ABEF$ est un rectangle tel que $E \in [BC]$.
Le but de l'exercice est de trouver la position de E sur le segment $[BC]$ pour que l'aire du rectangle $ABEF$ soit la même que l'aire du rectangle $ECDF$?

1. Choisir une variable x qui permet l'animation de la figure. Donner l'intervalle I dans lequel est varie la variable x.
2. Soit f la fonction de l'aire $ABEF$ suivant x et g la fonction de l'aire $FECD$ suivant x. Exprimer $f(x)$ et $g(x)$.
3. Tracer les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = g(x)$ dans un repère orthogonal.
4. Résoudre le problème algébriquement et vérifier votre solution graphiquement.

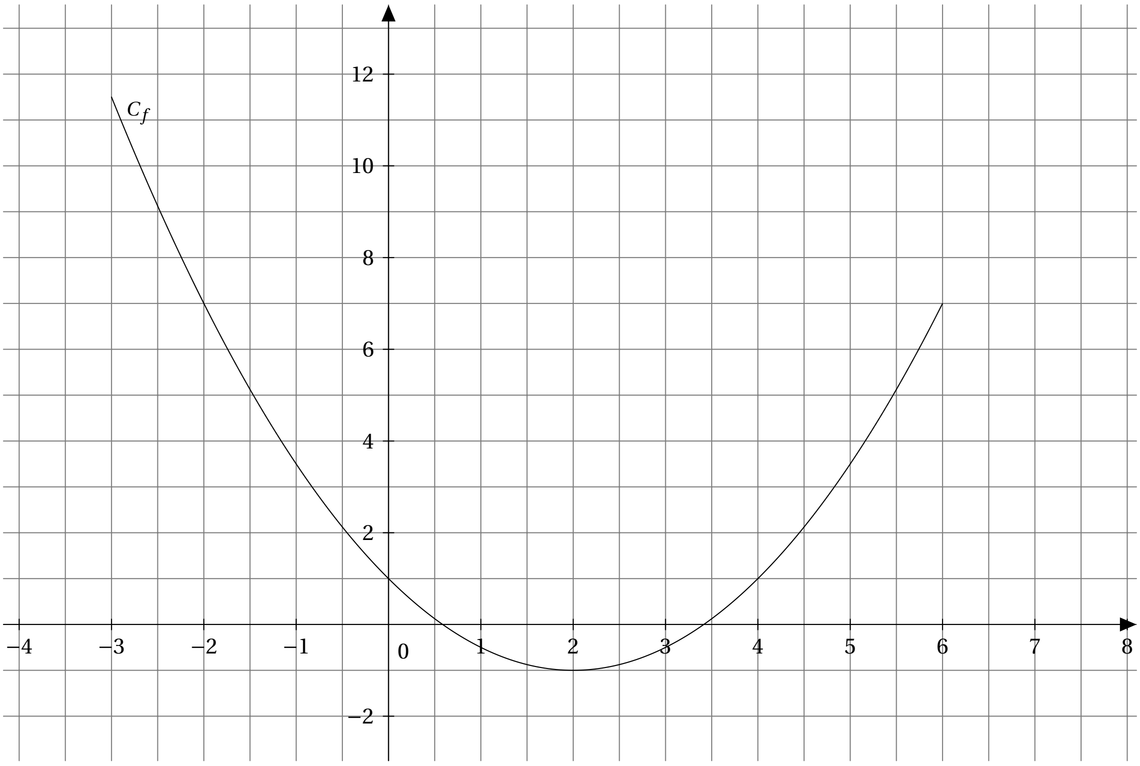


IV. Résolution graphique d'inéquations

IV. A. Inéquation $f(x) < k$ ou $f(x) - k < 0$ (ou $f(x) > k$ ou $f(x) - k > 0$)

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ revient à trouver les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est inférieure à k .
On construira une phrase de lecture analogue pour les inéquations du type $f(x) \leq k$; $f(x) > k$ et $f(x) \geq k$.

☞**Exercice 6**
Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.



Résoudre graphiquement (vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique) : $f(x) < 7$; $f(x) \geq -1$; $f(x) \leq 10$; $f(x) > 0$; $f(x) > 12$.

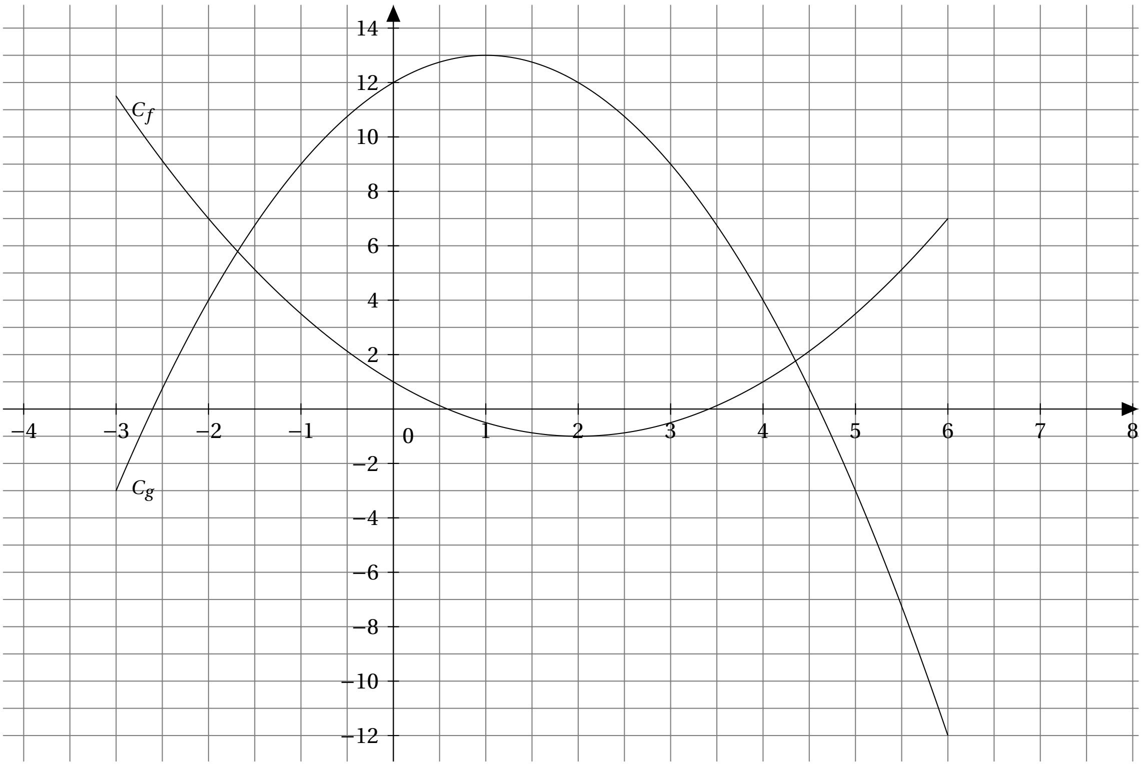
IV. B. Inéquation $f(x) < g(x)$ ou $f(x) - g(x) < 0$ (ou $f(x) > g(x)$ ou $f(x) - g(x) > 0$)

IV. B. 1. Résolution graphique

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ revient à trouver les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée (pour une même abscisse x) est inférieure à celle d'un point M' de la courbe $\mathscr{C}_g$.

☞**Exercice 7**

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.

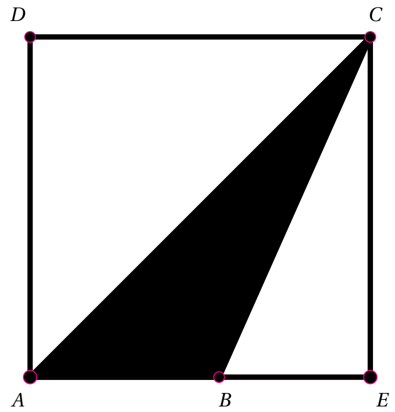


Résoudre graphiquement(vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique) : $f(x) < g(x)$; $f(x) \geq g(x)$.

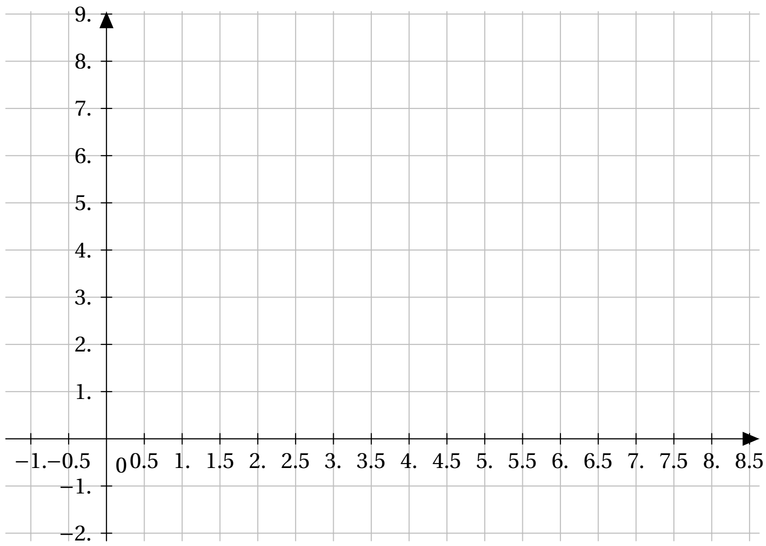
IV. B. 2. Résolution Algébrique d'inéquation linéaire

☞**Exercice 8**

Soit ABC un triangle inscrit dans un carré $AECD$ de côté x, tel que $BE = 2$.
Le but de l'exercice est de déterminer x pour que l'aire du triangle ABC soit inférieure ou égale à un quart de l'aire du carré $AECD$.



1. Dans quel intervalle varie la variable x ?
2. Exprimer l'aire du triangle ABC, notée $f(x)$, en fonction de x et l'aire du quart du carré, notée $g(x)$, en fonction de x.
3. Sur le graphique suivant, représenter les deux fonctions f et g par leur courbe.



4. Résoudre le problème algébriquement et graphiquement.