Fonction, représentation graphique d'une fonction

Table des Matières

Fonction, représentation graphique d'une fonction

I. Introduction historique

Activité 1

La tablette mathématique babylonienne *Plimpton 322* conservée à l'Université Columbia New-York a été trouvée en 1920 à Larsa (aujourd'hui Senkereh, en Irak, à 300 km au sud de Bagdad) et date d'environ 1 800 av. J.-C..

La tablette possède 17 lignes (les deux premières lignes sont des entêtes) et 4 colonnes (une partie est manquante), les nombres sont écrits en base soixante.
Les trois premières colonnes donnent les nombres en relation avec le triangle rectangle, la quatrième colonne donne le numéro de chaque ligne.
Avec le système décimal actuel on peut lire la ligne 5 :

$\left(\frac{b}{c}\right)^2$	b	c	
0,815 007 716 049 383	65	97	ligne 5
0,36	45	75	ligne 11

1. Pour les lignes remarquées, calculer $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Que peut-on dire triangle de côtés a, b et c ?

2. À tout couple $(b\ ;\ c)$ de la tablette correspond le nombre $\left(\frac{b}{c}\right)^2$ qui donne la pente de l'hypoténuse et du plus petit côté d'un triangle rectangle élevée au carré :

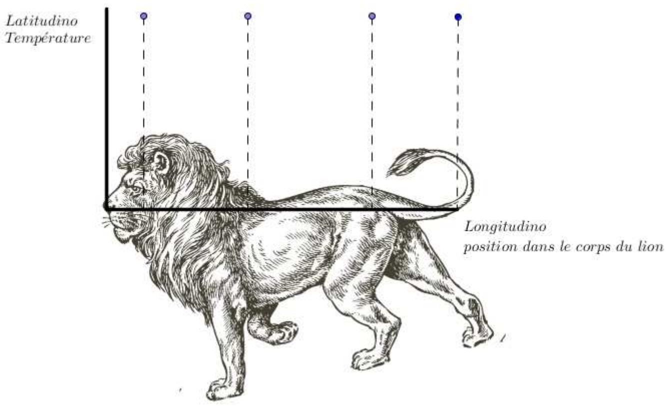
$$(b\ ;\ c) \longmapsto \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

   Vérifier les valeurs approchées données par les babyloniens.

On imagine que cette tablette aurait pu servir à des ingénieurs pour la construction d'édifice ou de palais, certains pensent qu'elle aurait pu être une simple table de trigonométrie ou même un exercice algébrique.
Sans parler de fonction, les tables permettent de mettre en évidence des relations entre un ou plusieurs nombres, le nombre d'éléments d'un table est fini, on ne décrit pas un processus qui permet de passer d'un nombre à un autre, le concept de variable n'est pas défini.

☞**Activité 2**

Nicole Oresme (1323-1382) propose une méthode graphique pour représenter les variations de la chaleur dans un corps : Il considère par exemple un corps (lion, âne bœuf) dont la chaleur n'est pas homogène mais varie suivant l'endroit où on la mesure. Afin de représenter différentes températures au sein du corps, il imagine une droite tracée dans ce corps. Il appelle longitudino la longueur qui sépare un point courant de la droite à un point origine arbitrairement fixé. En chaque point de cette droite il élève une perpendiculaire dont la hauteur (latitudino) est proportionnelle à l'intensité de la chaleur au point correspondant du corps.En chaque point de cette droite il élève une perpendiculaire dont la hauteur (latitudino) est proportionnelle à l'intensité de la chaleur au point correspondant du corps. Il obtient ainsi une figure géométrique dont l'examen rend plus aisé l'étude de la chaleur d'un corps. " *Les propriétés de cette qualité, écrit-il, en seront examinées plus clairement et plus facilement dès lors que quelque chose qui lui est semblable est dessiné en une figure plane, et que cette chose, rendue claire par exemple visible, est saisie rapidement et parfaitement par imagination ...car l'imagination des figures aide grandement à la connaissance des choses même*".



1. À quel axe correspond aujourd'hui la droite *longitudino* ?

2. À quel axe correspond aujourd'hui la droite *longitudino* ?

3. Dans l'exemple on a repéré quatre températures égales à $38,5°$ C dans le corps d'un lion, chaque segment mesure $3,85$ cm. Quel est le rapport de proportionnalité entre la température et la longueur d'un segment en pointillé ?

Nicole Oresme décrira aussi l'accélération uniforme de la vitesse en fonction du temps.
Au XVII ^{e} siècle la plus part des notions de fonctions sont décrites par des courbes qui décrivent des trajectoires, interprètent des phénomènes physiques pour décrire des observations.
L'algèbre et la résolution d'équation par Viète, Cardan permet l'essor de pensées nouvelles, la classification des courbes par Descartes et Fermat, puis Euler donne naissance à l'analyse. Bien plus tard, la notion de fonction est mise en place Dirichlet, Riemann, Cauchy notamment y ont contribué.

☞**Activité 3**

Le mathématicien allemand DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805-1859), donne l'exemple, d'une nouvelle fonction est nommée fonction caractéristique des irrationnels. Elle prend la valeur 0 si x est rationnel et 1 sinon.
Notons f la fonction caractéristique des irrationnels.

1. Donner l'image des nombres suivants par la fonction f : -1, 0, $\dfrac{1}{3}$, π, $\sqrt{2}$.

2. Donner deux nombres différents de ceux de la question précédente qui ont pour image 1.

II. Fonction et courbe d'une fonction

Définition

Soit un ensemble $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}$.
À tout nombre x de l'ensemble $\mathbb{E}$ on associe un unique nombre réel y, cette mise en association est appelée fonction.

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{E} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Le nombre y égale à $f(x)$ est appelé image du nombre x par la fonction f.
Le(s) nombre(s) x tel que $f(x) = y$ est appelé antécédent du nombre y par la fonction f.
L'ensemble $\mathbb{E}$ est appelé domaine de définition de la fonction f. Si $\mathbb{E} = \mathbb{N}$ alors la fonction f est généralement notée u et on l'appelle suite.

Définition

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{E}$ et $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ (graphe) de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ avec x prenant toutes les valeurs réelles de $\mathbb{E}$ et $y = f(x)$.
L'équation de la courbe $\mathscr{C}$ est $y = f(x)$.

Remarque

Dans le cas où $\mathbb{E}$ est un intervalle réel, la courbe $\mathscr{C}$ contient une infinité de points, pour en donner l'allure on relie quelques points dont certains sont des points particuliers.

Exercice 1

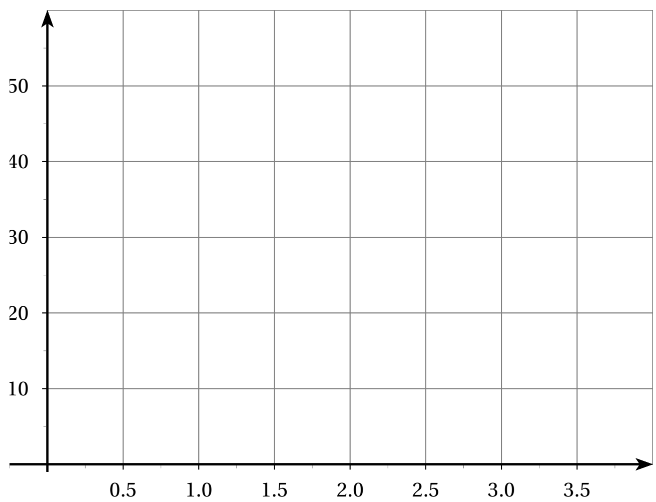
Au XVII^{e} siècle Galilée démontre que objet sans vitesse initiale, en chute libre possède une vitesse proportionnelle au temps de la chute.
Ainsi $f(t) = -\dfrac{1}{2} \times gt^2 + h$ avec $g = 9{,}81\text{m.s}^{-1}$ et h est la hauteur exprimée en mètre de l'objet à l'instant initial, $f(t)$ décrit la hauteur de l'objet, exprimée en mètre, au temps t exprimée en seconde.
Si on lance l'objet depuis le haut de la tour de Pise (Italie) $h = 53$, on a $f(t) = -4{,}905t^2 + 53$.

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivants :

t	0	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(t)$							

2. Quel domaine de définition de la fonction f peut-on raisonnablement choisir ?

3. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f.



III. Résolution graphique d'équations

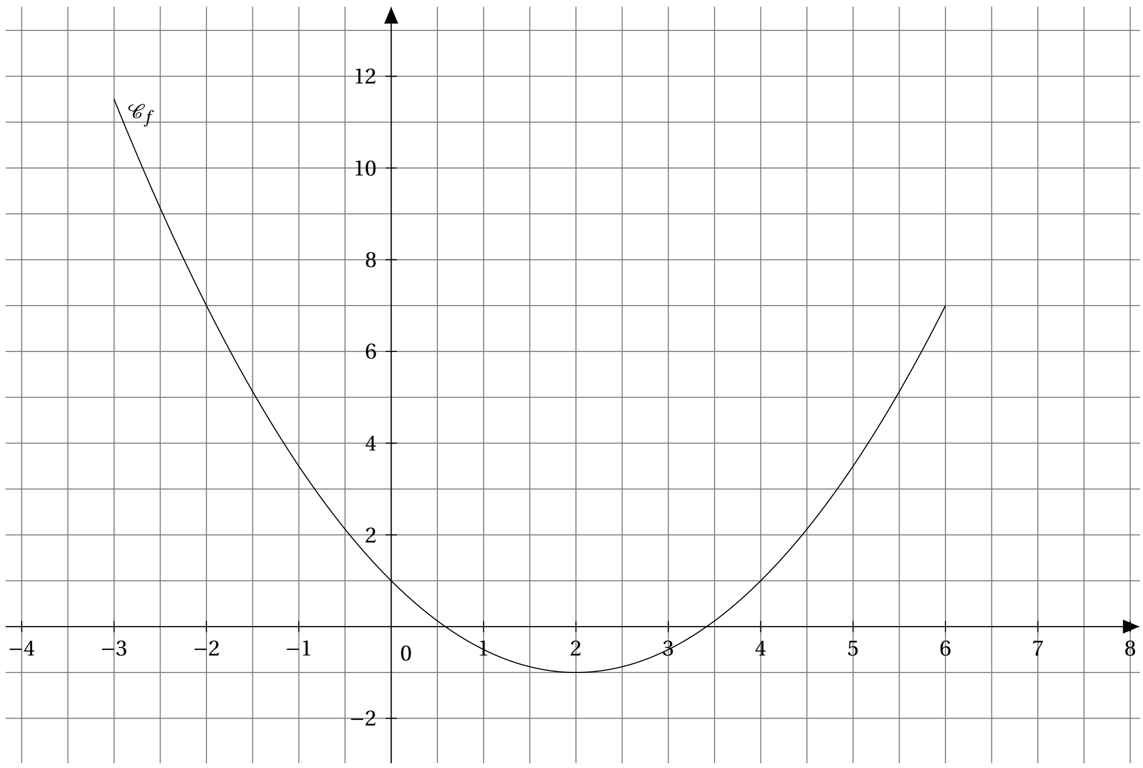
III. A. Équation $f(x) = k$ ou $f(x) - k = 0$

III. A. 1. Résolution graphique

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à trouver les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est k.

☞**Exercice 2**

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.



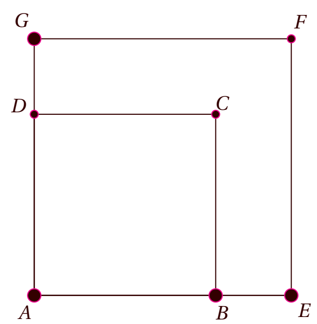
Résoudre graphiquement (vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique) : $f(x) = 7$; $f(x) = -1$; $f(x) = 10$; $f(x) = 0$; $f(x) = 12$.

III. A. 2. Résolution Algébrique d'équation linéaire

☞**Exercice 3**

L'unité est le centimètre.
Soit un carré $ABCD$ de côté x et un carré de $AEFG$ tel que $B \in [AE]$ et $D \in [AG]$ et $BE = DG = 1$.
Le but de l'exercice est de déterminer x pour que l'aire du polygone $DCBEFG$ soit de 6 cm^2.

1. Dans quel intervalle varie la longueur x ?
2. Soit f la fonction qui décrit l'aire du polygone $DCBEFG$.
   Exprimer, développer et réduire $f(x)$.
3. Dans un repère orthogonal, tracer la courbe de la fonction f.
4. Répondre au problème algébriquement et vérifier graphiquement votre solution.



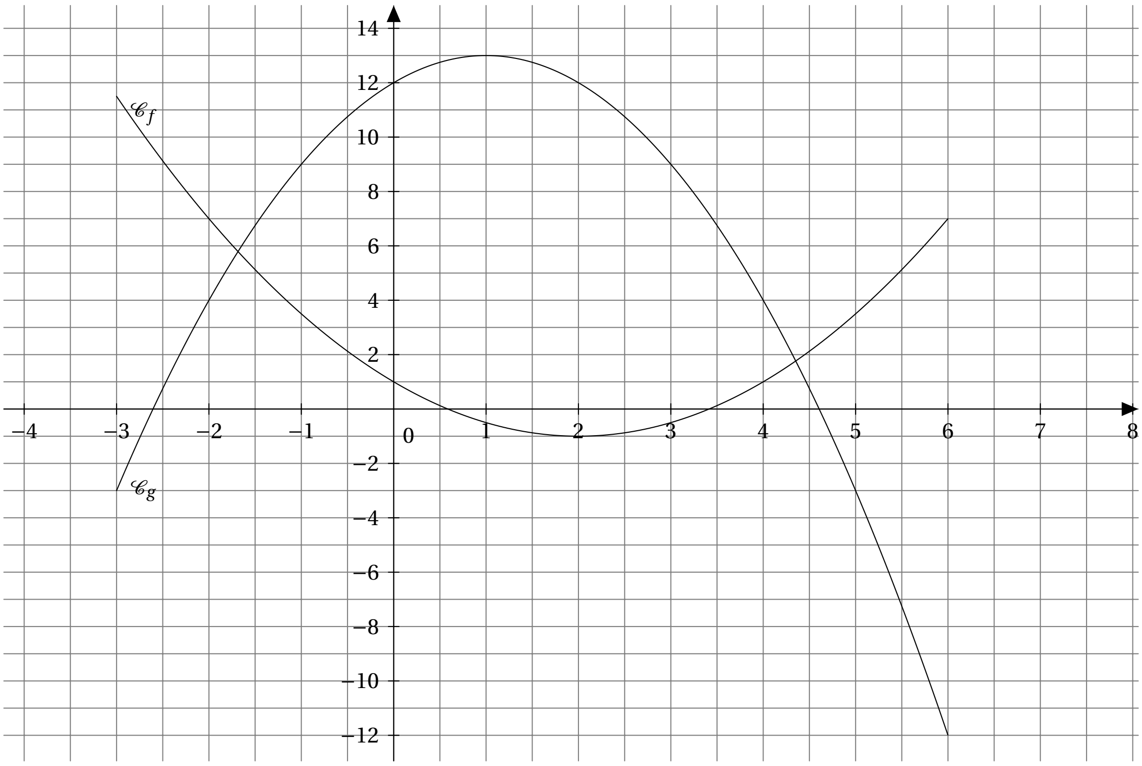
III. B. Équation $f(x) = g(x)$ ou $f(x) - g(x) = 0$

III. B. 1. Résolution graphique

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à trouver les abscisses x des points M d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

☞**Exercice 4**

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.



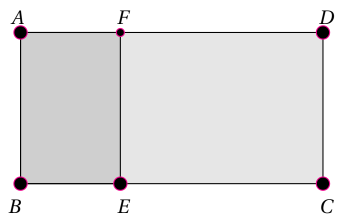
Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.(vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique).

III. B. 2. Résolution Algébrique d'équation linéaire

☞**Exercice 5**

$ABCD$ est un rectangle de côté $AB = 2$ et $BC = 4$ (unité de longueur).
$ABEF$ est un rectangle tel que $E \in [BC]$.
Le but de l'exercice est de trouver la position de E sur le segment $[BC]$ pour que l'aire du rectangle $ABEF$ soit la même que l'aire du rectangle $ECDF$?

1. Choisir une variable x qui permet l'animation de la figure. Donner l'intervalle I dans lequel est varie la variable x.
2. Soit f la fonction de l'aire $ABEF$ suivant x et g la fonction de l'aire $FECD$ suivant x. Exprimer $f(x)$ et $g(x)$.
3. Tracer les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = g(x)$ dans un repère orthogonal.
4. Résoudre le problème algébriquement et vérifier votre solution graphiquement.



III. B. 3. Équation produit

Théorème

Soient f et g deux fonctions définie sur un ensemble $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}$.

$$f(x) \times g(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0$$

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes.

1. $(3x+1)(-2x+1) = 0$
2. $x(x+1) = 0$
3. $x^2 - 2 = 0$
4. $(x+1)^2 - (2x-3)^2 = 0$
5. $x^3 - x = 0$
6. $\times x^2 x + 1 = x + 1$

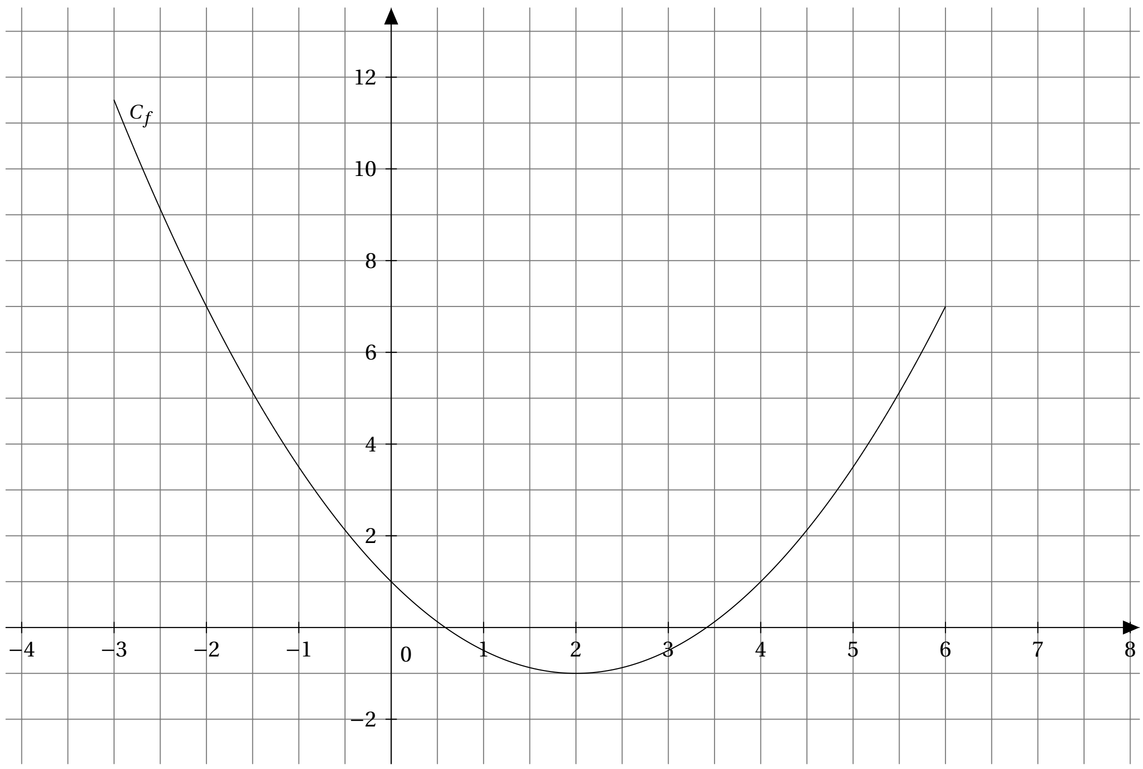
IV. Résolution graphique d'inéquations

IV. A. Inéquation $f(x) < k$ ou $f(x) - k < 0$ (ou $f(x) > k$ ou $f(x) - k > 0$)

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ revient à trouver les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est inférieure à k .
On construira une phrase de lecture analogue pour les inéquations du type $f(x) \leq k$; $f(x) > k$ et $f(x) \geq k$.

Exercice 7

Soit une fonction f définie sur un intervalle I représentée dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$.



Résoudre graphiquement (vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique) : $f(x) < 7$; $f(x) \geq -1$; $f(x) \leq 10$; $f(x) > 0$; $f(x) > 12$.

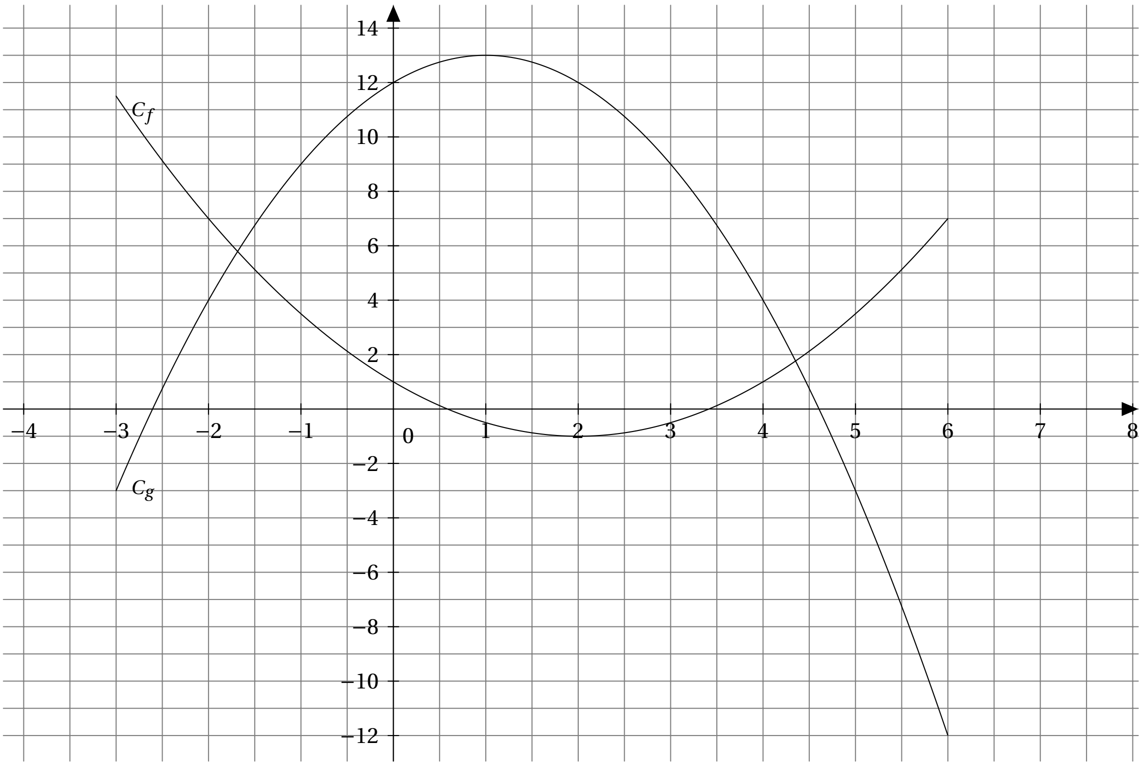
IV. B. Inéquation $f(x) < g(x)$ ou $f(x) - g(x) < 0$ (ou $f(x) > g(x)$ ou $f(x) - g(x) > 0$)

IV. B. 1. Résolution graphique

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ revient à trouver les abscisses x des points M de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée (pour une même abscisse x) est inférieure à celle d'un point M' de la courbe $\mathscr{C}_g$.

☞**Exercice 8**

Soit deux fonctions f et g définies sur un intervalle I représentée respectivement dans un repère par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.

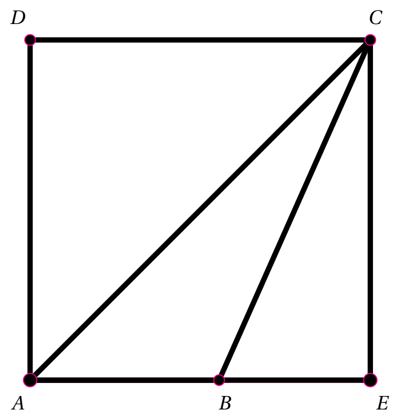


Résoudre graphiquement(vous rédigerez une phrase réponse qui explique la lecture et laisserez les traits de lecture sur le graphique) : $f(x) < g(x)$; $f(x) \geq g(x)$.

IV. B. 2. Résolution Algébrique d'inéquation linéaire

☞**Exercice 9**

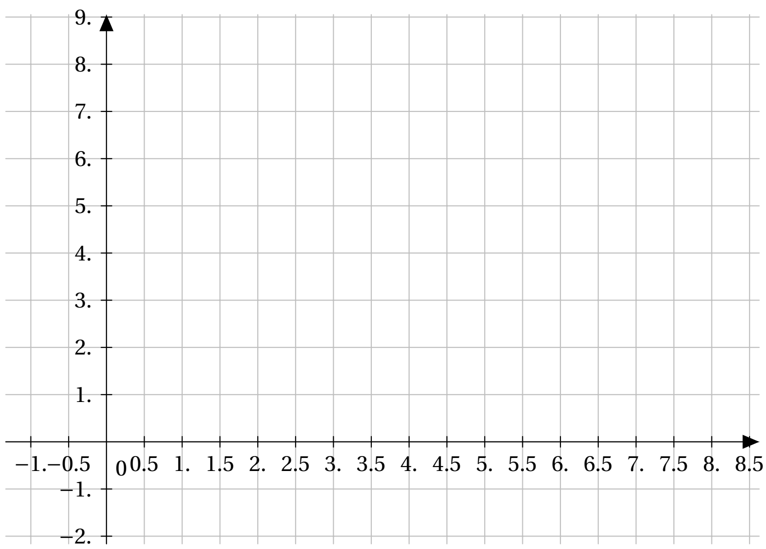
Soit ABC un triangle inscrit dans un carré $AECD$ de côté x, tel que $BE = 2$.
Le but de l'exercice est de déterminer x pour que l'aire du triangle ABC soit inférieure ou égale à un quart de l'aire du carré $AECD$.



1. Dans quel intervalle varie la variable x ?

2. Exprimer l'aire du triangle ABC, notée $f(x)$, en fonction de x et l'aire du quart du carré, notée $g(x)$, en fonction de x.

3. Sur le graphique suivant, représenter les deux fonctions f et g par leur courbe.



4. Résoudre le problème algébriquement et graphiquement.

IV. B. 3. Inéquation produit ou quotient

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur une intervalle $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout réel x de $\mathscr{E}$ $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ alors $f(x) \times g(x) > 0$ et le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$.
- Si pour tout réel x de $\mathscr{E}$ $f(x) < 0$ et $g(x) < 0$ alors $f(x) \times g(x) > 0$ et le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$.
- Si pour tout réel x de $\mathscr{E}$ $f(x) > 0$ et $g(x) < 0$ alors $f(x) \times g(x) < 0$ et le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$.
- Si pour tout réel x de $\mathscr{E}$ $f(x) < 0$ et $g(x) > 0$ alors $f(x) \times g(x) < 0$ et le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$.

Exemple

On souhaite étudier le signe du produit $(3x+1)(-2x+1)$ sur $\mathbb{R}$.

- On cherche le signe des expressions $3x+1$ et $-2x+1$:

$$\begin{array}{ll|ll|ll}
 & 3x+1>0 & & 3x+1<0 & & 3x+1=0 \\
\iff & 3x>-1 & \iff & 3x<-1 & \iff & 3x=-1 \\
\iff & x>\dfrac{-1}{3} & \iff & x<\dfrac{-1}{3} & \iff & x=\dfrac{-1}{3} \\
\iff & x\in\left]\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[& \iff & x\in\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{3}\right[& \iff & x\in\left\{\dfrac{1}{3}\right\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll|ll}
 & -2x+1>0 & & -2x+1<0 & & -2x+1=0 \\
\iff & -2x>-1 & \iff & -2x<-1 & \iff & -2x=-1 \\
\iff & x<\dfrac{1}{2} & \iff & x>\dfrac{1}{2} & \iff & x=\dfrac{1}{2} \\
\iff & x\in\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[& \iff & x\in\left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[& \iff & x\in\left\{\dfrac{1}{2}\right\}
\end{array}$$

- On pourrait rédiger une réponse sur le signe du produit, mais l'organisation d'un tableau de signe est plus claire à la compréhension.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+1)\times(-2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Conclusion :
  - $(3x+1)(-2x+1) > 0 \iff x \in \left]\dfrac{-1}{3}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$
  - $(3x+1)(-2x+1) < 0 \iff x \in \left]-\infty\,;\,\dfrac{-1}{3}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$
  - $(3x+1)(-2x+1) = 0 \iff x \in \left\{\dfrac{-1}{3}\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}$

Exemple

Pour étudier le signe d'un quotient c'est le même plan, avec la précaution de ne pas annuler le dénominateur.
Pour le signe de l'expression $\dfrac{3x+1}{-2x+1}$ on obtient le tableau de signe suivant :

-

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+1$		$+$		$+$	‖	$-$	
$\dfrac{3x+1}{-2x+1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

- Conclusion :
  - $(3x+1)(-2x+1) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left]\dfrac{-1}{3}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$
  - $(3x+1)(-2x+1) < 0 \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty\,;\,\dfrac{-1}{3}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$
  - $(3x+1)(-2x+1) = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$

☞Exercice 10

Étudier le signe des expressions suivantes :

1. $(5x+2)(-4x-3)$
2. $3x(x-1)(-x+2)$
3. $x^2(x+1)$
4. $2x^2-1$
5. $x-\dfrac{2}{x}$
6. $x+\dfrac{2x}{x-1}$