Colinéarité de vecteurs

Table des Matières

Colinéarité de vecteurs

I. Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont ***colinéaires*** s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k.\vec{v}$.

Exercice 1

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

1. Démontrer que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4,5\end{pmatrix}$

   Que peut-on conjecturer sur les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

2. Démontrer que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

Théorème

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
Deux vecteurs non nuls colinéaires ont leurs coordonnées proportionnelles

Démonstration 1

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe k réel non nul tel que :
  $\begin{cases}x = kx'\\ y = ky'\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}xy' = kx'y'\\ x'y = kx'y'\end{cases} \Longrightarrow$
  $xy' = x'y \Longrightarrow xy' - xy = 0$.

- Réciproquement,
  Si $xy' = x'y$ alors :
  - Si $x' = 0$ alors $xy' = 0$, $\vec{v}$ est non nul donc $y' \neq 0$ donc $x = 0$.
    $\vec{u}$ est non nul donc $y \neq 0$.
    On pose $k = \dfrac{y}{y'}$ on a $\vec{u} = k\vec{v}$ $\left(i.e\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}0\\y'\end{pmatrix}\right)$.
    On raisonne de la même manière si $x = 0$ ou $y = 0$ ou $y' = 0$.
  - Si x, x', y et y' ne sont pas nuls.
    $xy' = x'y \Longleftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$. On pose alors $k = \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$ et on a $\vec{u} = k\vec{v}$.

  Dans tous les cas, si $xy' = x'y$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

II. Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On appelle ***déterminant*** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel $xy' - x'y$.

On note $\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Propriété

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère du plan.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

Démonstration 2

Le résultat a déjà été démontré dans la démonstration 1.

Exercice 2

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

1. En utilisant le calcul du déterminant, démontrer que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 4,5 \end{pmatrix}$.
2. En utilisant le calcul du déterminant, démontrer que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

III. colinéarité et parallélisme

Propriété

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si la droite (AB) est parallèle à la droite (CD).

Démonstration 3

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ce qui équivaut à dire que les directions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les mêmes c'est à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Réciproquement, si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors en posant $k = \dfrac{AB}{CD}$ (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens) ou $k = -\dfrac{AB}{CD}$ (si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont un sens opposé) on a $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 3

Soit un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthogonal du plan.
Soient les points $A(-4\,;\,1)$, $B(2\,;\,4)$, $C(-5\,;\,-4)$, $D(-3\,;\,-3)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Faire une figure pour vérifier le résultat.

Exercice 4

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soient les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(3\,;\,4)$, $(6\,;\,2)$, $(-3,-2)$ et $(2\,;\,-2)$.

1. Calculer $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right)$, puis $\det\left(\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)$
2. Que peut-on conclure sur la nature du quadrilatère $ABCD$?
   Faire une figure pour vérifier le résultat.

Corollaire

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.
Soient A, B et C trois points distincts du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$ si et seulement si les points A, B et C sont alignés.

Démonstration 4

1. D'après le théorème précédent, que peut-on dire des droites (AB) et (BC).
2. Conclure.

Exercice 5

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

Soit $A(-1;2)$, $B(3;1)$ et $C(5;0,5)$. (Faire une figure.)

1. Calculer $\det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$.
2. Que peut-on en déduire sur les points A, B et C
3. Toujours en vous aidant de la colinéarité, déterminer l'ordonnée du point M d'abscisse 2 de la droite (AB).

Exercice 6

$ABCD$ est un carré, on construit les triangles équilatéraux direct ABI et CBJ. (faire une figure.)

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les coordonnées des six points de la figure. Expliquer les calculs pour les points I et J
2. En utilisant la colinéarité, montrer que les points I, J et D sont alignés.
3. Trouver au moins une autre démonstration pour prouver l'alignement des points I, J et D.