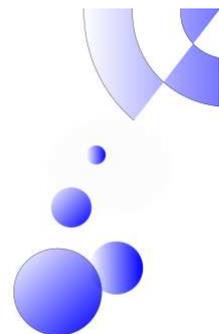
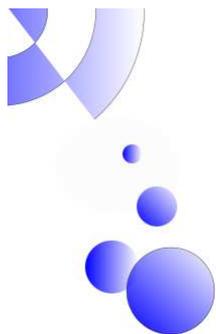




Table des Matières

I. Colinéarité de deux vecteurs	1
II. Déterminant de deux vecteurs	2
III. colinéarité et parallélisme	3



I. Colinéarité de deux vecteurs

➤ Définition

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} du plan sont **colinéaires** s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.

🔗 Exercice 1

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

1. Démontrer que les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires : $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4,5 \end{pmatrix}$

Que peut-on conjecturer sur les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} ?

2. Démontrer que les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

➤ Théorème

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Deux vecteurs non nuls colinéaires ont leurs coordonnées proportionnelles

🔗 Démonstration 1

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et \vec{v}

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires donc il existe k réel non nul tel que :

$$\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases} \implies \begin{cases} xy' = kx'y' \\ x'y = kx'y' \end{cases} \implies xy' = x'y \implies xy' - x'y = 0.$$

- Réciproquement,

Si $xy' = x'y$ alors :

- Si $x' = 0$ alors $xy' = 0$, \vec{v} est non nul donc $y' \neq 0$ donc $x = 0$.

\vec{u} est non nul donc $y \neq 0$.

On pose $k = \frac{y}{y'}$ on a $\vec{u} = k\vec{v}$

$$\left(i.e \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} \right).$$

On raisonne de la même manière si $x = 0$ ou $y = 0$ ou $y' = 0$.

- Si x, x', y et y' ne sont pas nuls.

$xy' = x'y \iff \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$. On pose alors $k =$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \text{ et on a } \vec{u} = k\vec{v}.$$

Dans tous les cas, si $xy' = x'y$ alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

II. Déterminant de deux vecteurs

☞ Définition

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On appelle **déterminant** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} le nombre réel $xy' - x'y$.

On note $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

☞ Propriété

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

☞ Démonstration 2

Le résultat a déjà été démontré dans la démonstration 1.

☞ Exercice 2

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

1. En utilisant le calcul du déterminant, démontrer que les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4,5 \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant le calcul du déterminant, démontrer que les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

III. colinéarité et parallélisme

Propriété

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.
Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

Le vecteur \overrightarrow{AB} est colinéaire au vecteur \overrightarrow{CD} si et seulement si la droite (AB) est parallèle à la droite (CD) .

Démonstration 3

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ce qui équivaut à dire que les directions des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont les mêmes c'est à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Réciproquement, si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors en posant $k = \frac{AB}{CD}$ (si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont le même sens) ou $k = -\frac{AB}{CD}$ (si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont un sens opposé) on a $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

Exercice 3

Soit un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal du plan.
Soient les points $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(-5; -4)$, $D(-3; -3)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Faire une figure pour vérifier le résultat.

Exercice 4

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soient les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(3; 4)$, $(6; 2)$, $(-3, -2)$ et $(2; -2)$.

1. Calculer $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$, puis $\det(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BC})$
2. Que peut-on conclure sur la nature du quadrilatère $ABCD$?
Faire une figure pour vérifier le résultat.

☞ Corollaire

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soient A, B et C trois points distincts du plan.

Le vecteur \overrightarrow{AB} est colinéaire au vecteur \overrightarrow{BC} si et seulement si les points A, B et C sont alignés.

☞ Démonstration 4

1. D'après le théorème précédent, que peut-on dire des droites (AB) et (BC) .
2. Conclure.

☞ Exercice 5

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soit $A(-1;2), B(3;1)$ et $C(5;0,5)$. (Faire une figure.)

1. Calculer $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
2. Que peut-on en déduire sur les points A, B et C
3. Toujours en vous aidant de la colinéarité, déterminer l'ordonnée du point M d'abscisse 2 de la droite (AB) .

☞ Exercice 6

$ABCD$ est un carré, on construit les triangles équilatéraux direct ABI et CBJ . (faire une figure.)

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1. Donner les coordonnées des six points de la figure. Expliquer les calculs pour les points I et J
2. En utilisant la colinéarité, montrer que les points I, J et D sont alignés.
3. Trouver au moins une autre démonstration pour prouver l'alignement des points I, J et D .

