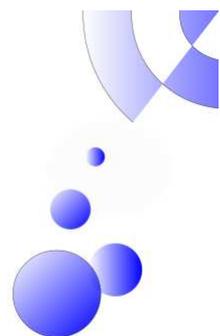
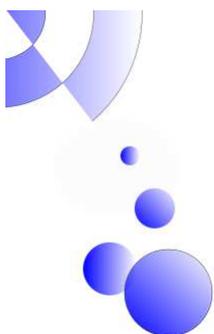




## Table des Matières

<b>I. Règles de calculs</b>	<b>1</b>
I. A. Écriture fractionnaire . . . . .	1
I. B. Puissances . . . . .	2
I. C. Racine carrée . . . . .	2
<b>II. Démonstration algébrique de l'irrationalité de <math>\sqrt{2}</math></b>	<b>3</b>



## I. Règles de calculs

### I. A. Écriture fractionnaire

#### ➤ Propriétés

Soient  $a, b, c, d$  et  $k$  cinq nombres réels tels que  $b$  et  $d$  ne sont pas nuls.

- $\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$  ( $c$  n'est pas nul)
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$  ( $c$  n'est pas nul)

#### ➤ Propriété

Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre nombres réels tels que  $b$  et  $d$  ne sont pas nuls.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

#### 🔗 Exercice 1

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel  $x$  non nul,  $\frac{x^2 - 5x + 1}{x} = x - 5 + \frac{1}{x}$ ,

2. Pour tout réel  $x, x \neq 1, x = \frac{x^2 - x}{x - 1}$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}, n \neq 1, n \times \frac{n+1}{n-1} - n = \frac{2n}{n-1}$ ,

4. Pour tout réel  $x$  non nul,  $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x+1}{x-1}$

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}, n \neq 1, 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n(n+1)}$

## I. B. Puissances

### ⇒ Propriété

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels,  $n$  et  $m$  deux entiers relatifs.

- $a^0 = 1$
- $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$  ( $a$  est non nul)
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$  ( $b$  est non nul)
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$  ( $a$  est non nul)

### ⇒ Exercice 2

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel  $x$ ,  $x^2(1-x) - x^2 = -x^3$

2. Pour tout nombre réel  $x$  non nul et pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\frac{nx^2}{(nx)^2} = \frac{1}{n}$

3. Pour tout nombre réel  $x$  non nul,  $\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x} \times (x^3 - 1) = x^2 - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x^3} = \frac{x^5 + x^3 - x^2 - 1}{x^3}$

## I. C. Racine carrée

### ⇒ Propriété

Soit  $a$  et  $b$  deux réels positifs.  $n$  est un entier relatif.

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  ( $b$  non nul)
- $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$
- $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

### ⇒ Démonstration 1

Démontrons la propriété :  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ ,  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

1. Développer et simplifier  $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ .
2. Donner  $\sqrt{ab}^2$ .
3. Comparer les carrés des nombres  $\sqrt{a}\sqrt{b}$  et  $\sqrt{ab}$ .
4. Conclure.

### ☞ Démonstration 2

Démontrons la propriété :  $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

1. Développer et simplifier  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ .
2. Donner  $\sqrt{a+b}^2$ .
3. Comparer les carrés des nombres  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  et  $\sqrt{a+b}$ .
4. Conclure.

### ☞ Exercice 3

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel  $x$ ,  $x \in [1 ; +\infty[$ ,  $\sqrt{x^3 - x^2} = x\sqrt{x-1}$
2. Pour tout réel  $x$ ,  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}}$

## II. Démonstration algébrique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

### ☞ Démonstration 3

Cette démonstration a été proposée par Euclide.  
raisonnons par l'absurde.

Proposition  $\mathcal{P}$  :  $\sqrt{2}$  est rationnel.

Soit  $\mathcal{P}$  est vraie soit  $\overline{\mathcal{P}}$  est vraie.

Si  $\mathcal{P}$  est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls  $p$  et  $q$  tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  et  $q$  le plus petit possible. On a  $p \neq q$ .

1. En comparant  $\sqrt{2}$  à 1, comparer  $p$  et  $q$ .
2. Écrire  $p^2$  en fonction de  $q^2$ .
3. Montrer que  $p(p-q) = q(2q-p)$ . En déduire  $\frac{p}{q}$  en fonction de  $2q-p$  et  $p-q$ .
4. Sachant que  $\sqrt{2} > 0$  c'est à dire  $\frac{p}{q} > 0$ , montrer que le signe de  $p-2q < 0$  c'est à dire  $p-q < q$ .
5. Écrire la contradiction.
6. Conclure sur le raisonnement.