Calcul littéral

Table des Matières

Calcul littéral

I. Règles de calculs

I. A. Écriture fractionnaire

Propriétés

Soient a, b, c, d et k cinq nombres réels tels que b et d ne sont pas nuls.

- $\dfrac{a}{d}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{d}$
- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$
- $k\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{ka}{b}$
- $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$
- $\dfrac{1}{\frac{c}{d}}=\dfrac{d}{c}$ (c n'est pas nul)
- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{ad}{bc}$ (c n'est pas nul)

Propriété

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que b et d ne sont pas nuls.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$$

Exercice 1

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel x non nul, $\dfrac{x^2-5x+1}{x}=x-5+\dfrac{1}{x}$,
2. Pour tout réel x, $x\neq 1$, $x=\dfrac{x^2-x}{x-1}$
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$, $n\times\dfrac{n+1}{n-1}-n=\dfrac{2n}{n-1}$,
4. Pour tout réel x non nul, $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{x+1}{x-1}$
5. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$, $1-\dfrac{1}{n+1}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n(n+1)}$

I. B. Puissances

Propriété

Soient a et b deux nombres réels, n et m deux entiers relatifs.

- $a^0 = 1$
- $\dfrac{1}{a^m} = a^{-m}$ (a est non nul)
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (b est non nul)
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (a est non nul)

Exercice 2

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel x, $x^2(1-x) - x^2 = -x^3$
2. Pour tout nombre réel x non nul et pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{nx^2}{(nx)^2} = \dfrac{1}{n}$
3. Pour tout nombre réel x non nul, $\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x} \times \left(x^3-1\right) = x^2 - \dfrac{1}{x} + 1 - \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{x^5+x^3-x^2-1}{x^3}$

I. C. Racine carrée

Propriété

Soit a et b deux réels positifs. n est un entier relatif.

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (b non nul)
- $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$
- $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Démonstration 1

Démontrons la propriété : $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

1. Développer et simplifier $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2$.
2. Donner $\sqrt{ab}^2$.
3. Comparer les carrés des nombres $\sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{ab}$.
4. Conclure.

☞**Démonstration 2**

Démontrons la propriété : $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

1. Développer et simplifier $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.
2. Donner $\sqrt{a+b}^2$.
3. Comparer les carrés des nombres $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$.
4. Conclure.

☞**Exercice 3**

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel x, $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $\sqrt{x^3 - x^2} = x\sqrt{x-1}$
2. Pour tout réel x, $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{x}}$

II. Démonstration algébrique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

☞**Démonstration 3**

Cette démonstration a été proposée par Euclide.
raisonnons par l'absurde.
Proposition $\mathscr{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel.

Soit $\mathscr{P}$ est vraie soit $\overline{\mathscr{P}}$ est vraie.

Si $\mathscr{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et q le plus petit possible. On a $p \neq q$.

1. En comparant $\sqrt{2}$ à 1, comparer p et q.
2. Écrire p^2 en fonction de q^2.
3. Montrer que $p(p-q) = q(2q-p)$. En déduire $\dfrac{p}{q}$ en fonction de $2q - p$ et $p - q$.
4. Sachant que $\sqrt{2} > 0$ c'est à dire $\dfrac{p}{q} > 0$, montrer que le signe de $p - 2q < 0$ c'est à dire $p - q < q$.
5. Écrire la contradiction.
6. Conclure sur le raisonnement.