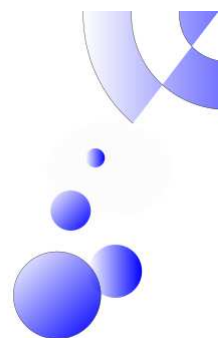
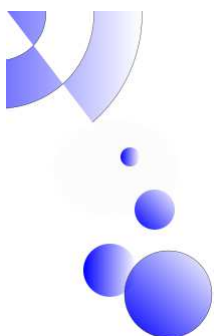




Table des Matières

I. Règles de calculs	1
I. A. Écriture fractionnaire	1
I. B. Puissances	2
I. C. Racine carrée	2
II. Démonstration algébrique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$	3



I. Règles de calculs

I. A. Écriture fractionnaire

➤ Propriétés

Soient a, b, c, d et k cinq nombres réels tels que b et d ne sont pas nuls.

- $\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$ (c n'est pas nul)
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ (c n'est pas nul)

➤ Propriété

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que b et d ne sont pas nuls.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

🔗 Exercice 1

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel x non nul, $\frac{x^2 - 5x + 1}{x} = x - 5 + \frac{1}{x}$,
2. Pour tout réel $x, x \neq 1, x = \frac{x^2 - x}{x - 1}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \neq 1, n \times \frac{n+1}{n-1} - n = \frac{2n}{n-1}$,
4. Pour tout réel x non nul, $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x+1}{x-1}$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \neq 1, 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n(n+1)}$

I. B. Puissances

⇒ Propriété

Soient a et b deux nombres réels, n et m deux entiers relatifs.

- $a^0 = 1$
- $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ (a est non nul)
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (b est non nul)
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (a est non nul)

⇒ Exercice 2

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel x , $x^2(1-x) - x^2 = -x^3$

2. Pour tout nombre réel x non nul et pour tout entier naturel n non nul, $\frac{nx^2}{(nx)^2} = \frac{1}{n}$

3. Pour tout nombre réel x non nul, $\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x} \times (x^3 - 1) = x^2 - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x^3} = \frac{x^5 + x^3 - x^2 - 1}{x^3}$

I. C. Racine carrée

⇒ Propriété

Soit a et b deux réels positifs. n est un entier relatif.

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (b non nul)
- $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$
- $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⇒ Démonstration 1

Démontrons la propriété : $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

1. Développer et simplifier $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2$.
2. Donner \sqrt{ab}^2 .
3. Comparer les carrés des nombres $\sqrt{a}\sqrt{b}$ et \sqrt{ab} .
4. Conclure.

☞ Démonstration 2

Démontrons la propriété : $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

1. Développer et simplifier $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.
2. Donner $\sqrt{a+b}^2$.
3. Comparer les carrés des nombres $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$.
4. Conclure.

☞ Exercice 3

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel x , $x \in [1 ; +\infty[$, $\sqrt{x^3 - x^2} = x\sqrt{x-1}$
2. Pour tout réel x , $x \in]0 ; +\infty[$, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}}$

II. Démonstration algébrique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

☞ Démonstration 3

Cette démonstration a été proposée par Euclide.
raisonnons par l'absurde.

Proposition \mathcal{P} : $\sqrt{2}$ est rationnel.

Soit \mathcal{P} est vraie soit $\overline{\mathcal{P}}$ est vraie.

Si \mathcal{P} est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et q le plus petit possible. On a $p \neq q$.

1. En comparant $\sqrt{2}$ à 1, comparer p et q .
2. Écrire p^2 en fonction de q^2 .
3. Montrer que $p(p-q) = q(2q-p)$. En déduire $\frac{p}{q}$ en fonction de $2q-p$ et $p-q$.
4. Sachant que $\sqrt{2} > 0$ c'est à dire $\frac{p}{q} > 0$, montrer que le signe de $p-2q < 0$ c'est à dire $p-q < q$.
5. Écrire la contradiction.
6. Conclure sur le raisonnement.