Calcul littéral

Table des Matières

Calcul littéral

I. Les identités remarquables

I. A. Caractérisations

Activité 1

Proposition : pour tous nombres réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
Est-ce que cette proposition est vraie ?

Activité 2

Les identités remarquables selon al Khwarizmi.
Dans son ouvrage Kitâb al-jabr wa al-muqâbala, " Le livre du rajout et de l'équilibre ", l'astronome et mathématicien perse al Khwarizmi présente sa méthode de résolution des équations (muadala).
Il formule ce qui sera appelé les identités remarquables ainsi que la règle des signes sans justifications.
Voici un extrait p27-30 qui présente sur des exemples les trois identités remarquables avec un partie des traductions algébriques.
Compléter les traductions manquantes.

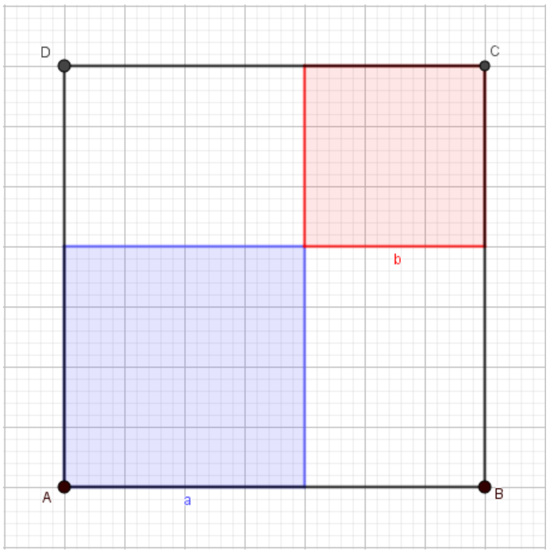
Le texte	traduction algébrique
Et si on dit : dix et une chose par elle-même.	$(10+x)(10+x)$
Tu dis : dix par dix : cent,	$10\times 10 = 100$
et dix par une chose : dix choses,	$10x$
et dix par une chose : dix choses également,	$10x$
et une chose par une chose : un bien ajouté.	x^2
Cela sera cent dirhams et vingt choses et un bien ajouté.	$100+20x+x^2$
Et si on dit : dix moins une chose par dix moins une chose.	$(10-x)(10-x)$
Tu dis : dix par dix : cent,	
et moins une chose par dix : dix choses retranchées,	
et moins une chose par dix : dix choses retranchées,	
et moins une chose par moins une chose : un bien ajouté.	
Cela sera cent dirhams et un bien moins vingt choses.	
Et si on dit : dix moins une chose par dix et une chose.	$(10+x)(10-x)$
Tu dis : dix par dix : cent,	$10\times 10 = 100$
et moins une chose par dix : dix Choses retranchées,	$-10x$
et une chose par dix : dix choses ajoutées,	$10x$
et moins une chose par une chose : un bien retranché.	$-x^2$
Tu auras : cent dirhams moins un bien.	$100-x^2$

☞**Activité 3**

1. Soient deux carrés de côté a et b où a et b sont deux nombres réels strictement positifs :

   (a) Exprimer l'aire du carré ABCD en fonction de a et b.

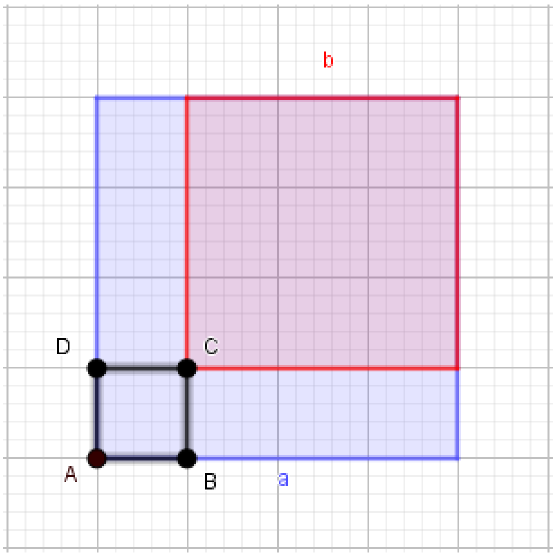
   (b) Développer $(a+b)^2$. Que représente l'expression $2ab$ sur la figure ?



2. Soient deux carrés de côté a et b où a et b sont deux nombres réels strictement positifs (ici $a > b$):

   (a) Exprimer l'aire du carré ABCD en fonction de a et b.

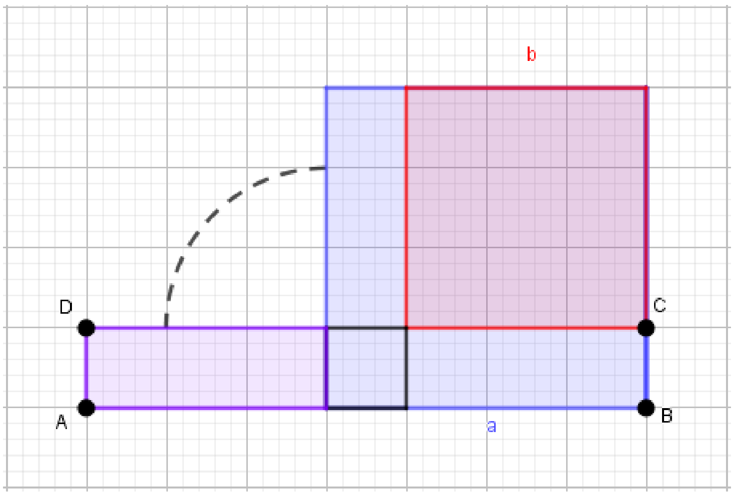
   (b) Développer $(a-b)^2$. Que représente l'expression $2ab$ sur la figure ?



3. Soient deux carrés de côté a et b où a et b sont deux nombres réels strictement positifs (ici $a > b$):

   (a) Exprimer l'aire du rectangle ABCD en fonction de a et b.

   (b) Développer $(a-b)(a+b)$. Dans le carré de côté a, hachurer l'aire d'expression $a^2 - b^2$.



✒ **Définition**

On appelle identités remarquables les résultats suivants, pour tous les réels a et b :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

☞**Exercice 1**

1. Développer et simplifier les expressions suivantes :
   (a) $(5x-1)^2$
   (b) $(7x+9)(7x-9)$
   (c) $(0,5x+1)^2 - (0,5x-3)^2$
2. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $121x^2 - 33x + 9$
   (b) $0,12x^2 - 75$
   (c) $(0,5x+1)^2 - (0,5x-3)^2$

☞**Exercice 2**

Soient a, b et c trois nombres réels.
Développer : $(a+b+c)^2$ et $(a+b)^3$.

I. B. Applications des identités remarquables

I. B. 1. Calcul mental

☞**Exercice 3**

1. Avec l'identité remarquable appropriée développer $(30-2)^2$. En déduire la valeur de 28^2.
2. Calculer mentalement : 99^2 ; 31^2 ; 25×35 ; $75^2 - 25$.

I. B. 2. Résolution d'équations

✒ **Propriété**

Le produit de deux nombres réels a et b est nul si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

$$ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

☞**Exercice 4**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $36x^2 - 12x + 1 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 9 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $0,25x^2 + x = -4$

I. C. Démontrer des identités

☞**Exercice 5**

Choisir une identité parmi celles proposées et la vérifier par le calcul littéral.

I. C. 1. Identité de Sophie Germain

Pour tous nombres réels x et y, on a :

$$x^4+4y^4=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)=((x+y)^2+y^2)((x-y)^2+y^2).$$

I. C. 2. Identité d'Argan

x est un nombre réel,

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$$

.

I. C. 3. Identité de Gauss

a et b sont des nombres réels,

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2].$$

I. C. 4. Identité de Legendre

a et b sont des nombres réels,

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2),(a+b)^2-(a-b)^2=4ab,(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2).$$

I. C. 5. Identité de Lagrange

a, b, c, x, y et z sont des nombres réels,

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2.$$

Puis l'identité suivante :

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2.$$

I. C. 6. Identité d'Euler

Le théorème des quatre carrés de Lagrange, également connu sous le nom de conjecture de Bachet, s'énonce de la façon suivante :
Tout entier positif peut s'exprimer comme la somme de quatre carrés.
Plus formellement, pour tout entier positif n, il existe des entiers a, b, c, d tels que :

$$n=a^2+b^2+c^2+d^2$$

La démonstration du théorème repose (en partie) sur l'identité des quatre carrés d'Euler :

$$\begin{aligned}(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2+t_2^2) &= (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+t_1t_2)^2\\ &\quad+(x_1y_2-y_1x_2+t_1z_2-z_1t_2)^2\\ &\quad+(x_1z_2-z_1x_2+y_1t_2-t_1y_2)^2\\ &\quad+(x_1t_2-t_1x_2+z_1y_2-y_1z_2)^2.\end{aligned}$$

.
Une approche algorithmique du théorème dans le cas où a, b, c et d ne sont pas nuls :

```
#approche algorithmique du théorème des quatre carrés de Lagrange
#avec ici a b c et d non nuls

def quatre_carre(n):
    L=[]
    for a in range(1,n):
        for b in range(1,n):
            for c in range(1,n):
```

```python
                for d in range(1,n):
                    if pow(a,2)+pow(b,2)+pow(c,2)+pow(d,2)==n:
                        return [a,b,c,d]

for n in range(4,51): #donne une liste de nombres qui conviennent si elle existe
    print("n=",n,"liste [a,b,c,d]",quatre_carre(n))
```

quatrecarrelagrange.py

II. Règles de calculs

II. A. Écriture fractionnaire

✒ Propriétés

Soient a, b, c, d et k cinq nombres réels tels que b et d ne sont pas nuls.

- $\dfrac{a}{d}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{d}$
- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$
- $k\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{ka}{b}$
- $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$
- $\dfrac{1}{\frac{c}{d}}=\dfrac{d}{c}$ (c n'est pas nul)
- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{ad}{bc}$ (c n'est pas nul)

✒ Propriété

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que b et d ne sont pas nuls.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$$

☞Exercice 6

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel x non nul, $\dfrac{x^2-5x+1}{x}=x-5+\dfrac{1}{x}$,
2. Pour tout réel x, $x\neq 1$, $x=\dfrac{x^2-x}{x-1}$
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$, $n\times\dfrac{n+1}{n-1}-n=\dfrac{2n}{n-1}$,
4. Pour tout réel x non nul, $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{x+1}{x-1}$
5. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$, $1-\dfrac{1}{n+1}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n(n+1)}$

II. B. Puissances

Propriété

Soient a et b deux nombres réels, n et m deux entiers relatifs.

- $a^0 = 1$
- $\dfrac{1}{a^m} = a^{-m}$ (a est non nul)
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (b est non nul)
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (a est non nul)

Exercice 7

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel x, $x^2(1-x) - x^2 = -x^3$
2. Pour tout nombre réel x non nul et pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{nx^2}{(nx)^2} = \dfrac{1}{n}$
3. Pour tout nombre réel x non nul, $\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x} \times \left(x^3 - 1\right) = x^2 - \dfrac{1}{x} + 1 - \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{x^5 + x^3 - x^2 - 1}{x^3}$

II. C. Racine carrée

Propriété

Soit a et b deux réels positifs. n est un entier relatif.

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (b non nul)
- $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$
- $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Démonstration 1

Démontrons la propriété : $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

1. Comparer les carrés des nombres $\sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{ab}$.
2. Conclure.

☞**Démonstration 2**

Démontrons la propriété : $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

1. Comparer les carrés des nombres $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$.
2. Conclure.

☞**Exercice 8**

Montrer que les identités suivantes sont vraies :

1. Pour tout réel x, $x \in [1\,;\,+\infty[$, $\sqrt{x^3 - x^2} = x\sqrt{x-1}$
2. Pour tout réel x, $x \in]0\,;\,+\infty[$, $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{x}}$

III. Démonstration algébrique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

☞**Démonstration 3**

Cette démonstration a été proposée par Euclide.
raisonnons par l'absurde.
Proposition $\mathscr{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel.

Soit $\mathscr{P}$ est vraie soit $\overline{\mathscr{P}}$ est vraie.

Si $\mathscr{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et q le plus petit possible. On a $p \neq q$.

1. En comparant $\sqrt{2}$ à 1, comparer p et q.
2. Écrire p^2 en fonction de q^2.
3. Montrer que $p(p-q) = q(2q-p)$. En déduire $\dfrac{p}{q}$ en fonction de $2q-p$ et $p-q$.
4. Sachant que $\sqrt{2} > 0$ c'est à dire $\dfrac{p}{q} > 0$, montrer que le signe de $p - 2q < 0$ c'est à dire $p - q < q$.
5. Écrire la contradiction.
6. Conclure sur le raisonnement.