Arithmétique

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Multiples définition

Un nombre entier relatif b est multiple d'un nombre entier relatif a s'il existe un nombre entier relatif k tel que :

$$b = ka$$

Exemples :

12 est multiple de 4 car il existe l'entier relatif 3 tel que $4 \times 3 = 12$.

-12 est multiple de 4 car il existe l'entier relatif -3 tel que $4 \times (-3) = -12$.

D'une manière générale les multiples de 4 sont les nombres $4 \times n$ où n est un entier relatif :
$\{... ;\ -16 ;\ -12 ;\ -8 ;\ -4 ; 0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; ...\}$.

Diviseurs définition

Un nombre entier relatif a est un diviseur de l'entier relatif b s'il existe un entier relatif k tel que :

$$ak = b$$

On note $a|b$ qui se lit a divise b.

Exemples :
4 est un diviseur de 12 car il existe l'entier relatif 3 tel que $4 \times 3 = 12$. On note alors $4|12$.

-4 est un diviseur de 12 car il existe l'entier relatif -3 tel que $(-4) \times (-3) = 12$. On note alors $(-4)|12$.

D'une manière générale, les diviseurs de 12 sont dans les entiers de l'ensemble $\{-12\ ;\ -6\ ;\ -4\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 12\}$.

Le *PPCM* des nombres entiers relatifs a et b est le plus multiple entier naturel de a et b.

Exemple : $PPCM(12\ ;\ 18)$:
Les multiples entiers naturels de 12 :
{12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; 96 ; 108 ; 120...}.

Les multiples entiers naturels de 18 :
{18 ; 36 ; 54 ; 72 ; 90 ; 108 ; 126 ; ...}.

Les multiples communs entiers naturels de 12 et 18 :
{36 ; 72 ; 108 ; ...}

$PPCM(12\ ;\ 18) = 36$.

Le *PGCD* des nombres entiers relatifs a et b est le grand diviseur entier naturel de a et b.

Exemple : $PGCD(12\ ;\ 18)$:
Les diviseurs entiers naturels de 12 : $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 12\}$.

Les diviseurs entiers naturels de 18 : $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 18\}$.

Les diviseurs entiers naturels communs de 12 et 18 : $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6\}$

$PGCD(12\ ;\ 18) = 6$.

Un nombre entier naturel n est dit premier s'il n'a que 2 diviseurs c'est à dire que s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.
1 n'est pas un nombre premier.

Le crible d'Eratosthène permet de déterminer les premiers nombres premiers :

	2	3	4	5	6	7		9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Nombres premiers

Un nombre entier naturel n est dit premier s'il n'a que 2 diviseurs c'est à dire que s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.
1 n'est pas un nombre premier.

Le crible d'Eratosthène permet de déterminer les premiers nombres premiers :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Un nombre entier naturel n est dit premier s'il n'a que 2 diviseurs c'est à dire que s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.
1 n'est pas un nombre premier.

Le crible d'Eratosthène permet de déterminer les nombres premiers :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Un nombre entier naturel n est dit premier s'il n'a que 2 diviseurs c'est à dire que s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.
1 n'est pas un nombre premier.

Le crible d'Eratosthène permet de déterminer les premiers nombres premiers :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Un nombre entier naturel n est dit premier s'il n'a que 2 diviseurs c'est à dire que s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.
1 n'est pas un nombre premier.

Le crible d'Eratosthène permet de déterminer les premiers nombres premiers :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Décomposition d'un entier naturel en facteurs de nombres premiers

Tout nombre entier n se décompose de manière unique en un produit de facteurs premiers.

Exemple : 132.

$$\begin{array}{r|c} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & - \end{array}$$

$132 = 2^2 \times 3 \times 11$

Décomposition d'un entier naturel en facteurs de nombres premiers

Exemple : $132 = 2^2 \times 3 \times 11$

$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$

132 possède 12 diviseurs.

$2^0 \times 3^0 \times 11^0 = 1$	$2^1 \times 3^0 \times 11^0 = 2$	$2^2 \times 3^0 \times 11^0 = 4$
$2^0 \times 3^0 \times 11^1 = 11$	$2^1 \times 3^0 \times 11^1 = 22$	$2^2 \times 3^0 \times 11^1 = 44$
$2^0 \times 3^1 \times 11^0 = 3$	$2^1 \times 3^1 \times 11^1 = 66$	$2^2 \times 3^1 \times 11^0 = 12$
$2^0 \times 3^1 \times 11^1 = 33$	$2^1 \times 3^1 \times 11^0 = 6$	$2^2 \times 3^1 \times 11^1 = 132$

Exemple : $PPCM(60\ ;\ 126)$:
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$
$PPCM(60\ ;\ 126) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$

Exemple : $PGCD(60\ ;\ 126)$:
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$
$PGCD(60\ ;\ 126) = 2 \times 3 = 6$

FIN