Arithmétique

Table des Matières

Arithmétique

I. Multiples et diviseurs

I. A. Multiples

Définition

Un nombre entier b est multiple d'un nombre entier a s'il existe un nombre entier k tel que :

$$b = ka$$

Exemple

28 est multiple de 4 car $4 \times 7 = 28$.
De la même manière donner deux autres exemples d'un multiple d'un nombre.

Remarque

- Les nombres entiers de la table de multiplication d'un entier naturel n sont des multiples de n.
- Il existe une infinité de multiples d'un nombre entier n.

Exercice 1

1. Quel est le plus petit multiple commun de 12 et 18 ? On notera ce nombre $PPCM(12\ ;\ 18)$.
2. Quel est le deuxième multiple commun de 12 et 18 ? (c'est à dire le plus petit multiple commun de 12 et 18 strictement plus grand que $PPCM(12\ ;\ 18)$).

Théorème

Soit a un nombre entier.
La somme de deux multiples de a est multiple de a

Démonstration 1

Laissée en exercice

I. B. Diviseurs

Définition

Un nombre entier a est un diviseur de l'entier b s'il existe un entier k tel que :

$$ak = b$$

On note $a|b$

Exemple

4 est un diviseur de 28 car $4 \times 7 = 28$. On note alors $4|28$.
De la même manière donner deux autres exemples d'un diviseur d'un nombre.

✒ **Remarque**

La proposition suivante est admise :
le nombre de diviseurs d'un entier n est un nombre entier naturel compris entre 2 et $2\sqrt{n}$.
Ainsi le nombre de diviseurs de 100 est un nombre compris entre 2 et 20 ($2\sqrt{100} = 20$).

☞**Exercice 2**

a, b et c sont trois entiers non nuls tels que $a|b$ et $b|c$.

1. Démontrer que $a|a$
2. Démontrer que $a|c$
3. Démontrer que si $a|b$ et $b|a$ alors $a = b$

☞**Exercice 3**

Un nombre entier naturel n est dit parfait s'il est la somme de ses diviseurs propres, c'est à dire tous ses diviseurs sauf lui-même.
Les quatre premiers nombres parfaits, 6, 28, 496 et 8 128, sont connus depuis l'Antiquité.
Ils sont notamment mentionnés dans les travaux de Nicomache de Gérase et de Théon de Smyrne (II e siècle apr. J.-C.).
Le cinquième nombre parfait, 33 550 336, apparaît dans un codex latin datant de 1456. Les sixième et septième nombres parfaits (8 589 869 056 et 137 438 691 328) sont dus à Cataldi (fin du XVI e siècle), tandis que le huitième est dû à Euler (1772) : 2 305 843 008 139 952 128.

1. Montrer que 6, 28, 496 et 8 128 sont des nombres parfaits.
2. Montrer que 42 n'est pas un nombre parfait.
3. (pour aller plus loin : travail de recherche, aucune démonstration n'est attendue.)
   (a) Qu'est ce qu'un nombre de Mersenne ?
   Donner quelques détails sur le mathématicien Mersenne ?
   (b) Donner la *proposition 36 du Livre IX des Eléments d'Euclide* qui décrit l'utilisation des nombres Mersenne pour trouver des nombres parfaits.
   Site Internet pouvant être consultés :
   - https://www.apmep.fr/IMG/pdf/MGE.pdf : *Table des matières des Éléments d'Euclide*
   - https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Mersenne_premier : *l'introduction décrit simplement les nombres de Mersenne, des exemples sont donnés.*

   (c) Vérifier que les quatre premiers nombre de Mersenne permettent de trouver les quatre premiers nombres parfaits. En admettant que 33 550 336 est un nombre parfait, dire comment le trouver à partir du cinquième nombre de Mersenne.

☞**Exercice 4**

Quel est le plus grand diviseur commun des nombres 126 et 702 ? On notera ce nombre $PGCD(126\,;\,702)$.

I. C. Nombre pair et impair

I. C. 1. Caractérisation

✒ **Définition**

- Un nombre entier naturel n est pair s'il est multiple de 2, c'est à dire qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.
- Un entier naturel qui n'est pas pair est impair. Pour tout entier naturel impair n, il existe un nombre entier naturel k tel que $n = 2k + 1$

✒ Théorème

- Le carré d'un nombre entier pair n est pair
- Le carré d'un nombre entier impair n est impair

☞Démonstration 2

Laissée en exercice

I. C. 2. Démonstrations arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

☞Démonstration 3

Cette démonstration a été proposée par Aristote.
raisonnons par l'absurde.
Proposition $\mathscr{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel.

Soit $\mathscr{P}$ est vraie soit $\overline{\mathscr{P}}$ est vraie.

Si $\mathscr{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et p le plus petit possible.

1. En comparant $\sqrt{2}$ à 1, comparer p et q.
2. Écrire p^2 en fonction de q^2.
3. En déduire la parité de p^2, puis la parité de p.
4. Monter qu'il existe un entier naturel p' tel que $q^2 = 2p'^2$. En déduire $\sqrt{2} = \dfrac{q}{p'}$.
5. Écrire la contradiction à laquelle on aboutit.
6. Conclure sur le raisonnement.

☞Démonstration 4

Cette démonstration est une variante de la première proposée par Aristote.
raisonnons par l'absurde.
Proposition $\mathscr{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel.

Soit $\mathscr{P}$ est vraie soit $\overline{\mathscr{P}}$ est vraie.

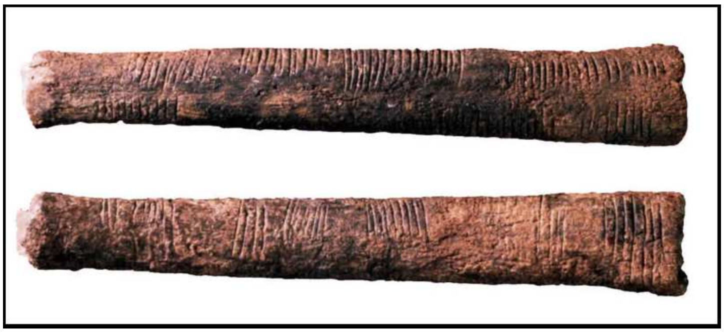
Si $\mathscr{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q le plus petit possible (premier entre eux, la fraction est irréductible).

1. Écrire p^2 en fonction de q^2.
2. En déduire la parité de p^2, puis la parité de p.
3. Monter qu'il existe un entier naturel p' tel que $q^2 = 2p'^2$. En déduire la parité de q^2 puis celle de q.
4. Écrire la contradiction à laquelle on aboutit.
5. Conclure sur le raisonnement.

II. Nombres premiers

II. A. Introduction historique

Les plus anciennes traces des nombres premiers ont été trouvées près du lac Edouard au Zaïre sur un os de plus de 20 000 ans, appelé l'os d'Ishango et recouvert d'entailles marquant des nombres premiers 19, 17, 13, 11 tels que leur somme est 60.



Mais c'est véritablement avec Euclide (300 av. J.-C.) que les bases de l'Arithmétique des nombres premiers vont être posées. Dans ce livre VII des *Éléments d'Euclide* on trouve les notions suivantes :
"L'unité est ce selon quoi chacune des choses existentes est dite une. "Un nombre est un assemblage composé d'unité. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seul, Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelques nombres."

✒ Définition

Un nombre entier naturel n est dit premier s'il n'a que 2 diviseurs c'est à dire que s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.
1 n'est pas un nombre premier.

✒ Exemple

Les premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; ....
Citer cinq autres nombres premiers.

✒ Théorème

(admis)
Il existe une infinité de nombres premiers

☞**Exercice 5**

Le crible d'Eratosthène est un algorithme permettant de déterminer tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre entier n.
Pour cet exemple on choisit $n = 100$.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. Avec le tableau des nombres entiers inférieurs à 100, exécuter l'algorithme suivant :
   Algorithme (crible d'Eratosthène)
   Tant que tous les nombres ne sont pas entourés ou rayés :
   Entoure le plus petit k nombre non rayé (et non entouré)
   Raye tous les multiples de k
   Fin tant que
   Écrit la liste de tous les nombres entourés.

2. A quoi correspond la liste de tous les nombres entourés ?

Ce qu'il faudrait démontrer (on admet les propositions suivantes) :
On considère le tableau des n premiers entiers naturels strictement supérieurs à 1.

- Le plus petit nombre entouré est nécessairement un nombre premier. Réciproquement, un nombre premier (inférieur ou égale à n) sera nécessairement entouré.
- L'algorithme s'arrête : tous les nombres inférieurs ou égaux à n seront soient rayés soient entourés.

II. B. Décomposition d'un nombre entier

Théorème

(admis)
Tout nombre entier n se décompose de manière unique en un produit de facteurs premiers.

Exemple

$132 = 2^2 \times 3 \times 11$.
Les puissances des facteurs premiers permettent de trouver tous les diviseurs du nombre entier (ici 132) :
$(2+1)\times(1+1)\times(1+1) = 12$, 132 possède 12 diviseurs. On peut ainsi trouver tous les diviseurs de 132 à partir d'un tableau ou d'un arbre de dénombrement

$2^0 \times 3^0 \times 11^0 = 1$
$2^0 \times 3^0 \times 11^1 = 11$
$2^0 \times 3^1 \times 11^0 = 3$
$2^0 \times 3^1 \times 11^1 = 33$
$2^1 \times 3^0 \times 11^0 = 2$
$2^1 \times 3^0 \times 11^1 = 22$
$2^1 \times 3^1 \times 11^0 = 6$
$2^1 \times 3^1 \times 11^1 = 66$
$2^2 \times 3^0 \times 11^0 = 4$
$2^2 \times 3^0 \times 11^1 = 44$
$2^2 \times 3^1 \times 11^0 = 12$
$2^2 \times 3^1 \times 11^1 = 132$

☞**Exercice 6**

Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants :

1. 75 000 (on pourra écrire ce nombre comme le produit de 75 et une puissance de 10, puis décomposer chacun).
2. 45^3

☞**Exercice 7**

Trouver tous les diviseurs de 270