

# Signe d'un produit ou d'un quotient de fonctions

Stéphane Mirbel

# Produit de deux fonctions affines - exemple

On souhaite étudier le signe du produit  $(3x+1)(-2x+1)$  sur  $\mathbb{R}$ .

- On cherche le signe des expressions  $3x+1$  et  $-2x+1$  :

$$\begin{array}{l|l|l} 3x+1 > 0 & 3x+1 < 0 & 3x+1 = 0 \\ \Leftrightarrow 3x > -1 & \Leftrightarrow 3x < -1 & \Leftrightarrow 3x = -1 \\ \Leftrightarrow x > \frac{-1}{3} & \Leftrightarrow x < \frac{-1}{3} & \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3} \\ \Leftrightarrow x \in \left] \frac{-1}{3}; +\infty \right[ & \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{-1}{3} \right[ & \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1}{3} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} -2x+1 > 0 & -2x+1 < 0 & -2x+1 = 0 \\ \Leftrightarrow -2x > -1 & \Leftrightarrow -2x < -1 & \Leftrightarrow -2x = -1 \\ \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} & \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} & \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[ & \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ & \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{2} \right\} \end{array}$$

# Produit de deux fonctions affines - exemple

Signe du produit  $(3x+1)(-2x+1)$  sur  $\mathbb{R}$  :

- On cherche le signe des expressions  $3x+1$  et  $-2x+1$  :

$$\begin{array}{l|l|l} 3x+1 > 0 & 3x+1 < 0 & 3x+1 = 0 \\ \Leftrightarrow 3x > -1 & \Leftrightarrow 3x < -1 & \Leftrightarrow 3x = -1 \\ \Leftrightarrow x > \frac{-1}{3} & \Leftrightarrow x < \frac{-1}{3} & \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3} \\ \Leftrightarrow x \in \left] \frac{-1}{3}; +\infty \right[ & \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{-1}{3} \right[ & \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1}{3} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} -2x+1 > 0 & -2x+1 < 0 & -2x+1 = 0 \\ \Leftrightarrow -2x > -1 & \Leftrightarrow -2x < -1 & \Leftrightarrow -2x = -1 \\ \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} & \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} & \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[ & \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ & \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{2} \right\} \end{array}$$

# Produit de deux fonctions affines - exemple

Signe du produit  $(3x+1)(-2x+1)$  sur  $\mathbb{R}$  :

- On cherche le signe des expressions  $3x+1$  et  $-2x+1$  :

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{-1}{3}; +\infty \right[ \quad \left| \quad \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{-1}{3} \right[ \quad \left| \quad \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[ \quad \left| \quad \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \quad \left| \quad \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

- Tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$3x+1$		-	0	+	+
$-2x+1$		+	+	0	-
$(3x+1) \times (-2x+1)$		-	0	0	-

# Produit de deux fonctions affines - exemple

Signe du produit  $(3x+1)(-2x+1)$  sur  $\mathbb{R}$  :

- Tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3x+1$	-	0	+	+
$-2x+1$	+	+	0	-
$(3x+1) \times (-2x+1)$	-	0	+	-

- Conclusion :

$$(3x+1)(-2x+1) > 0 \quad \left| \quad \begin{array}{c} (3x+1)(-2x+1) < 0 \\ \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{-1}{3} \right[ \cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \end{array} \quad \left| \quad (3x+1)(-2x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$$

# Quotient de deux fonctions affines - exemple

Signe du quotient  $\frac{3x+1}{-2x+1}$  sur  $\mathbb{R}$  :

- On cherche le signe des expressions  $3x+1$  et  $-2x+1$  :

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 3x+1 > 0 \\ x \in \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[ \end{array} \quad \left| \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} 3x+1 < 0 \\ x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[ \end{array} \quad \left| \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} 3x+1 = 0 \\ x \in \left\{ \frac{1}{3} \right\} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} -2x+1 > 0 \\ x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[ \end{array} \quad \left| \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} -2x+1 < 0 \\ x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \end{array} \quad \left| \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} -2x+1 = 0 \\ x \in \left\{ \frac{1}{2} \right\} \end{array}$$

- Tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$3x+1$		-	0	+	+
$-2x+1$		+	+	-	
$\frac{3x+1}{-2x+1}$		-	0	+	-

# Quotient de deux fonctions affines - exemple

Signe du quotient  $\frac{3x+1}{-2x+1}$  sur  $\mathbb{R}$  :

- Tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3x+1$	-	0	+	+
$-2x+1$	+		+	-
$\frac{3x+1}{-2x+1}$	-	0	+	-

- Conclusion :

$$\frac{3x+1}{-2x+1} > 0 \quad \left| \quad \frac{3x+1}{-2x+1} < 0 \quad \left| \quad \frac{3x+1}{-2x+1} = 0 \right. \right.$$
$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{-1}{3} ; \frac{1}{2} \right[ \quad \left| \quad \Leftrightarrow x \in \left] -\infty ; \frac{-1}{3} \right[ \cup \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[ \quad \left| \quad \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$$

# Quotient de deux fonctions - exemple

On cherche le signe de l'expression  $\frac{x^2}{x^2+1}$  sur  $\mathbb{R}$  :

- Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 \geq 0$  et  $x^2 = 0$  équivaut à  $x = 0$ .  
Aussi, pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ .

- Conclusion :

$$\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \iff x \in \mathbb{R}^*$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 0 \iff x \in \{0\}$$

- Tableau de signe (facultatif) :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$x^2$	+	0	+
$x^2 + 1$	+		+
$\frac{x^2}{x^2+1}$	+	0	+



# Produit de deux fonctions - exemple

On cherche le signe de l'expression  $(x+1)\sqrt{x}$  su  $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$  :

- Pour tout réel  $x$  positif,  $x+1 \geq 1 > 0$  et  $\sqrt{x} \geq 0$  et  $\sqrt{x} = 0$  équivaut à  $x = 0$ .
- Conclusion :  
 $(x+1)\sqrt{x} > 0 \iff x \in \mathbb{R}_+^* = ]0; +\infty[$   
 $(x+1)\sqrt{x} = 0 \iff x \in \{0\}$
- Tableau de signe (facultatif) :

$x$	0	$+\infty$
$x+1$		+
$\sqrt{x}$	0	+
$(x+1)\sqrt{x}$	0	+

FIN