# Signe d'un produit et d'un quotient

## Table des Matières

# Signe d'un produit et d'un quotient

## I. Règle des signes

**Propriété**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur une intervalle $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout réel $x$ de $\mathscr{E}$ $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ alors $f(x) \times g(x) > 0$ et le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$.
- Si pour tout réel $x$ de $\mathscr{E}$ $f(x) < 0$ et $g(x) < 0$ alors $f(x) \times g(x) > 0$ et le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$.
- Si pour tout réel $x$ de $\mathscr{E}$ $f(x) > 0$ et $g(x) < 0$ alors $f(x) \times g(x) < 0$ et le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$.
- Si pour tout réel $x$ de $\mathscr{E}$ $f(x) < 0$ et $g(x) > 0$ alors $f(x) \times g(x) < 0$ et le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$.

## II. Exemple d'étude d'un signe d'une expression produit ou quotient de deux fonctions affines

### II. A. Signe d'un produit de deux fonctions affines

**Activité 1**

Soient les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 0,25x - 1 \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = -2x + 1 \end{array}$$

1. Résoudre algébriquement $f(x) > 0$.
2. Compléter le tableau de signe de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = 0.25x - 1$ | | 0 | |

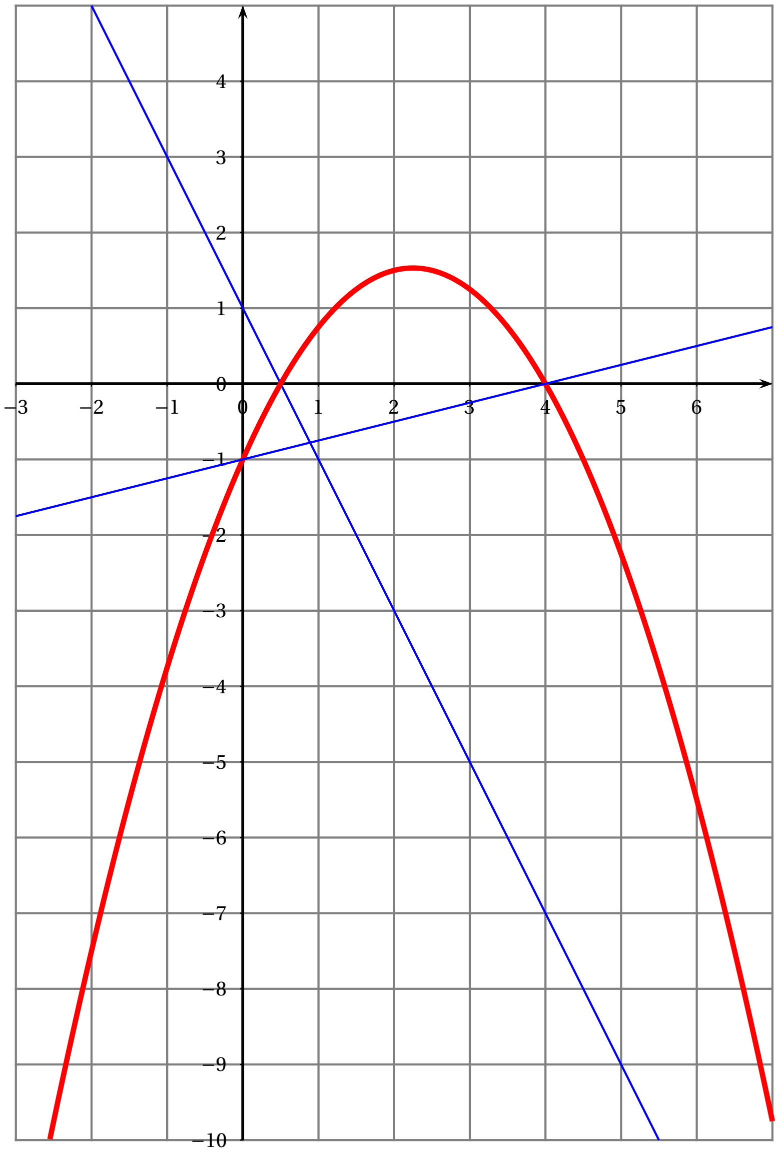
3. Résoudre algébriquement $g(x) > 0$.
4. Compléter le tableau de signe de la fonction $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x) = -2x + 1$ | | 0 | |

5. Compléter le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $0.5$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 0.25x - 1$ | | | | |
| $g(x) = -2x + 1$ | | | | |
| $f(x) \times g(x)$ | | | | |

6. Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ suivant, on donne la droite de la fonction affine $f$ et la droite de la fonction affine $g$ et la courbe du produit $f(x) \times g(x)$ :




(a) Reconnaître les droites des fonctions $f$ et $g$ sur le graphique.

(b) Repérer les points du plan tel que $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. Qu'en déduire pour le produit $f(x) \times g(x)$ ?

(c) Colorier la région du plan telle que $f(x) > 0$ et $g(x) < 0$. Qu'en déduire pour le produit $f(x) \times g(x)$ ?

(d) Colorier (d'une autre couleur) la région du plan telle que $f(x) < 0$ et $g(x) > 0$. Qu'en déduire pour le produit $f(x) \times g(x)$ ?

(e) Colorier (d'une autre couleur) la région du plan telle que $f(x) < 0$ et $g(x) < 0$. Qu'en déduire pour le produit $f(x) \times g(x)$ ?

## II. B. Signe d'un quotient de deux fonctions affines

☞**Activité 2**

Soient les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par :

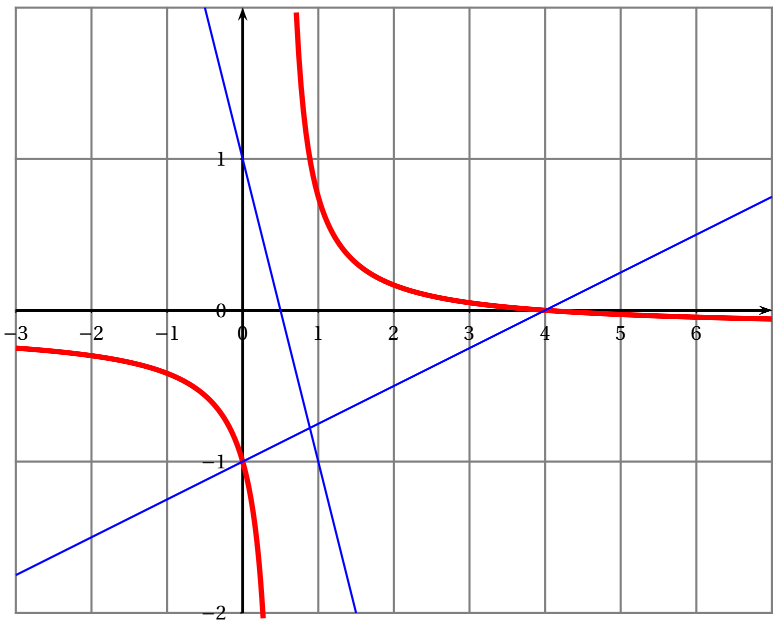
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 0,25x - 1 \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = -2x + 1 \end{array}$$

1. Compléter le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $0.5$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 0.25x - 1$ | | | | |
| $g(x) = -2x + 1$ | | | | |
| $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ | | | | |

2. Dans le repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ suivant, on donne la droite de la fonction affine $f$ et la droite de la fonction affine $g$ et la courbe du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ :




   (a) Reconnaître les droites des fonctions $f$ et $g$ sur le graphique.

   (b) Repérer les points du plan tel que $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. Qu'en déduire pour le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ?

   (c) Colorier la région du plan telle que $f(x) > 0$ et $g(x) < 0$. Qu'en déduire pour le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ?

   (d) Colorier (d'une autre couleur) la région du plan telle que $f(x) < 0$ et $g(x) > 0$. Qu'en déduire pour le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ?

   (e) Colorier (d'une autre couleur) la région du plan telle que $f(x) < 0$ et $g(x) < 0$. Qu'en déduire pour le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ?

## III. Méthode de détermination du signe d'un produit ou d'un quotient de fonctions affines

**Exemple**

On souhaite étudier le signe du produit $(3x+1)(-2x+1)$ sur $\mathbb{R}$.

- On cherche le signe des expressions $3x+1$ et $-2x+1$ :

$$\begin{aligned} & 3x+1>0 \\ \iff & 3x>-1 \\ \iff & x>\frac{-1}{3} \\ \iff & x\in\left]\frac{-1}{3}\ ;\ +\infty\right[ \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} & 3x+1<0 \\ \iff & 3x<-1 \\ \iff & x<\frac{-1}{3} \\ \iff & x\in\left]-\infty\ ;\ \frac{-1}{3}\right[ \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} & 3x+1=0 \\ \iff & 3x=-1 \\ \iff & x=\frac{-1}{3} \\ \iff & x\in\left\{\frac{-1}{3}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2x+1>0 \\ \iff & -2x>-1 \\ \iff & x<\frac{1}{2} \\ \iff & x\in\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right[ \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} & -2x+1<0 \\ \iff & -2x<-1 \\ \iff & x>\frac{1}{2} \\ \iff & x\in\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[ \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} & -2x+1=0 \\ \iff & -2x=-1 \\ \iff & x=\frac{1}{2} \\ \iff & x\in\left\{\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

- On pourrait rédiger une réponse sur le signe du produit, mais l'organisation d'un tableau de signe est plus claire à la compréhension.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $-2x+1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(3x+1)\times(-2x+1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

- Conclusion :

$$\begin{aligned} & (3x+1)(-2x+1)>0 \\ & \iff x\in\left]\frac{-1}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\right[ \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} & (3x+1)(-2x+1)<0 \\ & \iff x\in\left]-\infty\ ;\ \frac{-1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[ \end{aligned} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} & (3x+1)(-2x+1)=0 \\ & \iff x\in\left\{\frac{-1}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

**Exemple**

Pour étudier le signe d'un quotient c'est le même plan, avec la précaution de ne pas annuler le dénominateur.
Pour le signe de l'expression $\dfrac{3x+1}{-2x+1}$ on obtient le tableau de signe suivant :

- | $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
  |---|---|---|---|---|---|---|---|
  | $3x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
  | $-2x+1$ | | $+$ | | $+$ | \|\| | $-$ | |
  | $\dfrac{3x+1}{-2x+1}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | |

- Conclusion :
  - $\dfrac{3x+1}{-2x+1} > 0 \Longleftrightarrow x \in \left]\dfrac{-1}{3}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$
  - $\dfrac{3x+1}{-2x+1} < 0 \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty\,;\,\dfrac{-1}{3}\right[ \cup \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$
  - $\dfrac{3x+1}{-2x+1} = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$

**Exercice 1**

Étudier le signe des expressions suivantes :

1. $(2x+1)(-3x+6)$ sur $\mathbb{R}$
2. $(x-1)(-x+2)$ sur $\mathbb{R}$
3. $x(2x+3)$ sur $\mathbb{R}$
4. $5x^2+4x$ sur $\mathbb{R}$
5. $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+$
6. $\dfrac{x^2+x+1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$