Probabilités

Table des Matières

☙ Probabilités ❧

I. Introduction et vocabulaire

I. A. Des éléments d'histoire des probabilités

C'est à travers les jeux de hasard que naît la science des probabilités.
Nombre de Mathématiciens ont essayé de répondre aux questions du hasard.
Dès le moyen âge les jeux de hasard provoque des questionnements : comment répartir équitablement des gains lorsqu'une partie est arrêtée (problème des partis d'Antoine Gombaud dit le chevalier Méré), quel événement est le plus probable (problème du Duc de Toscane) entre obtenir 9 et obtenir 10 avec le lancé de trois dés.
De Luca Pacioli dans son *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportio et Proportionalita* , publié en 1494 aux échanges entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654 il a fallu deux siècles pour répondre au problème des parties. De ces travaux, il en découlera le premier traité des probabilités écrit Christiaan Huygens (1629-1695), en 1657, *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés)*.
Le traité de Jacques Bernoulli (1662-1716), *Ars Conjectandi* publiée après sa mort à Bâle en 1713, fait apparaitre un lien entre fréquences et probabilités, il énonce et démontre la loi faible des grands nombres pour le jeu Pile ou Face.

- Problème des parties : travaux dirigés
- Problème du Duc de Toscane : travaux dirigés

I. B. Expérience aléatoire

✒ Définition

une situation (expérimentale) est dite aléatoire lorsqu'elle fait intervenir le hasard ou qu'il y a une incertitude sur les résultats.

✒ Exemple

- Trouver les bons numéros du loto
- Jouer à lancer un dé (même si le dé est truqué)
- La date et le lieu de la prochaine catastrophe naturelle
- Si votre premier enfant sera un garçon ou une fille
- La note que vous aurez au prochain devoir

✒ Remarque

Même si certains résultats font moins intervenir le hasard que d'autres (comme votre note au prochain devoir !), il reste une indécision quant au résultat final qui reste inconnu tant qu'il n'a pas eu lieu. En prenant en considération un certain nombre de paramètres (comme vos révisons pour le devoir, vos notes aux précédents devoirs) on peut estimer par des calculs de probabilité un nombre compris entre 0 et 1 qui représente "la chance" d'obtenir un résultat donné (par exemple obtenir 14/20 au prochain devoir avec une chance de 75%).

I. C. Univers

Définition

On appelle univers l'ensemble de tous les résultats possibles. On le note généralement Ω. On considérera toujours l'univers finis.

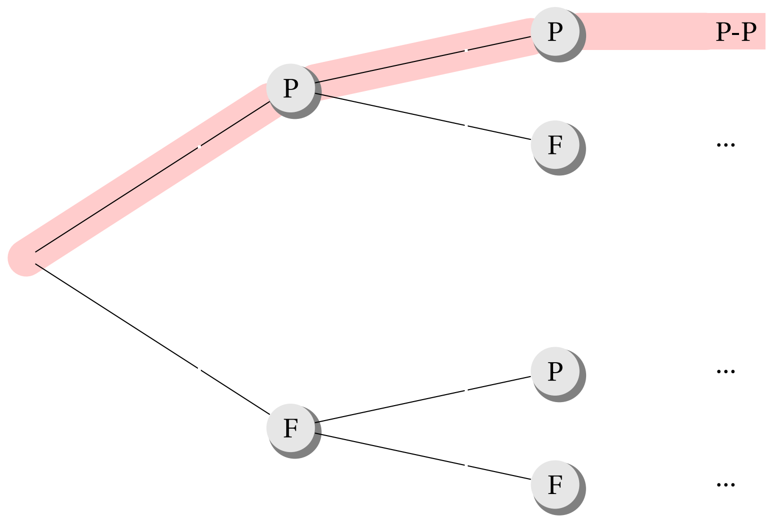
Exercice 1

Compléter les situations suivantes :

- On lance une fois un dé non truqué, à six faces. L'univers est $\Omega = \ldots.$
- On lance deux fois une pièce de monnaie. L'univers est $\Omega = \ldots.$
  On peut représenter l'univers par un tableau ou un arbre :
  - Pour lire l'ensemble de tous les résultats, il faut compléter les couples à l'intérieur du tableau.

2^ePièce / 1^ePièce	Pile P	Face F
Pile P		
Face F		

  - Pour lire l'ensemble de tous les résultats, il faut suivre les quatre chemins de l'arbre (**arbre de dénombrement**), noter les couples résultats au bout de chaque chemin.



I. D. Événement

Définition

Un événement est une partie de l'univers. Un événement n'ayant qu'un seul élément est appelé événement élémentaire. l'univers est l'événement dit certain, l'événement n'ayant aucun élément est appelé vide, on le note $\emptyset$.

Exercice 2

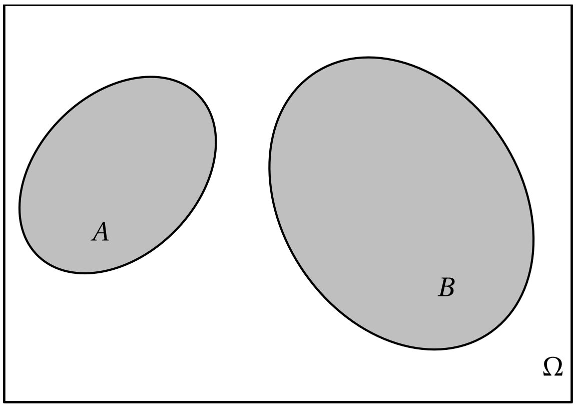
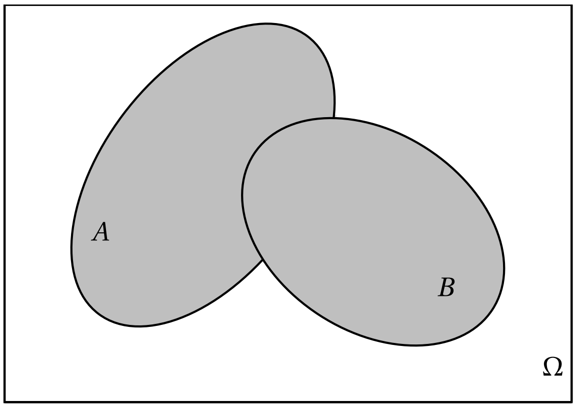
- On lance une fois un dé non truqué, à six faces. L'univers est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
  Soit A l'événement associé à la phrase "obtenir un multiple de 3". On a $A = \ldots.$
- On lance deux fois une pièce de monnaie. L'univers est $\Omega = \{(P;P);(P;F);(F;P);(F;F)\}$.
  Soit B l'événement "obtenir au moins une fois Pile". $B = \ldots.$

Pour les parties suivantes, on notera l'univers Ω et A et B sont deux événements de Ω.

I. E. Intersection d'événements

✒ Définition

L'intersection de A et B notée $A \cap B$ est l'ensemble des événements communs à A et B. Si l'intersection de deux événements est vide, on dit qu'ils sont disjoints ou incompatibles.

$A \cap B = \emptyset$, A et B incompatibles	$A \cap B \neq \emptyset$
	

☞**Exercice 3**

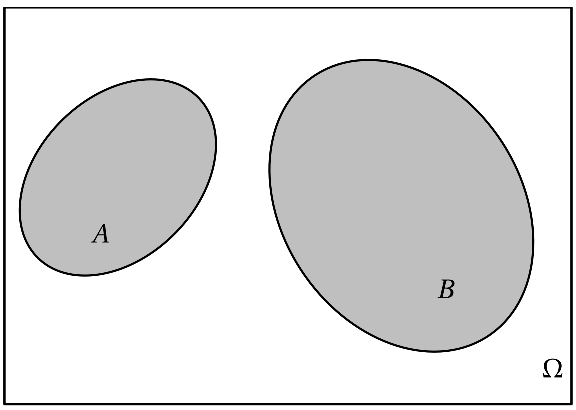
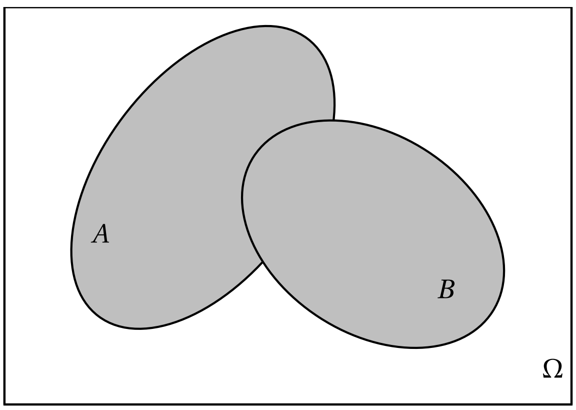
- On lance une fois un dé non truqué, à six faces. L'univers est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
  Soit A l'événement associé à la phrase "obtenir un multiple de 3", on a $A = \{3;6\}$ et B l'événement "obtenir un nombre pair", on a $B = \{2;4;6\}$.
  $A \cap B = ...$

- On lance deux fois une pièce de monnaie. L'univers est $\Omega = \{(P;P);(P;F);(F;P);(F;F)\}$.
  Soit A "obtenir au plus une fois Pile", $A = \{(P;F);(F;P);(F;F)\}$ et B l'événement "obtenir au moins une fois Pile". $B = \{(P;P);(P;F);(F;P)\}$.
  $A \cap B = ...$

I. F. Réunion ou union

✒ Définition

L'union de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des événements A, de B ou de $A \cap B$.

$A \cap B = \emptyset$	$A \cap B \neq \emptyset$
	

☞**Exercice 4**

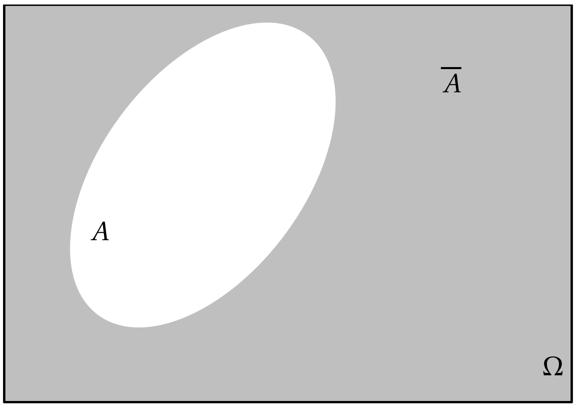
- On lance une fois un dé non truqué, à six faces. L'univers est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
  Soit A l'événement associé à la phrase "obtenir un multiple de 3", on a $A = \{3;6\}$ et B l'événement "obtenir un nombre pair", on a $B = \{2;4;6\}$.
  $A \cup B = ...$

- On lance deux fois une pièce de monnaie. L'univers est $\Omega = \{(P;P);(P;F);(F;P);(F;F)\}$.
  Soit A "obtenir au plus une fois Pile", $A = \{(P;F);(F;P);(F;F)\}$ et B l'événement "obtenir au moins une fois Pile". $B = \{(P;P);(P;F);(F;P)\}$.
  $A \cup B = ... = ...$

I. G. Contraire

Définition

L'événement contraire d'un événement A est l'ensemble des événements élémentaires de l'univers Ω qui ne sont pas dans A, on le note $\overline{A}$.



☞**Exercice 5**

- On lance une fois un dé non truqué, à six faces. L'univers est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
  Soit A l'événement associé à la phrase "obtenir un multiple de 3", on a $A = \{3;6\}$ et $\overline{A} = ...$

- On lance deux fois une pièce de monnaie. L'univers est $\Omega = \{(P;P);(P;F);(F;P);(F;F)\}$.
  Soit B l'événement "obtenir au moins une fois Pile". $B = \{(P;P);(P;F);(F;P)\}$ et $\overline{B} = ...$

II. Calcul de probabilité

II. A. Cas général

☞**Activité 1**

Un dé est truqué, après une étude de statistique, on s'aperçoit que la proportion d'obtenir chaque numéro (sauf le 6) est la suivante :

numéro	1	2	3	4	5	6
probabilité (proportion)	$10\% = 0,1$	$5\% = 0,05$	$10\% = 0,1$	$5\% = 0,05$	$10\% = 0,1$	

1. Retrouver la dernière probabilité, celle d'obtenir 6.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir l'événement A, "obtenir un numéro impair" ?

✒ Définition

Une probabilité d'un événement élémentaire est un nombre compris entre 0 et 1 obtenu par des statistiques, il s'agit d'une fréquence "stable" d'apparition de l'événement élémentaire (voir Travaux Pratiques de simulations).

✒ Théorème

- La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent l'événement.
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
- $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.

II. B. Réunion ou union

✒ Théorème

Soit A et B deux événements non vides de Ω.

- Si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$) alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Dans tous les cas, on a, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$A \cap B = \emptyset$, $P(A \cap B) = 0$	$A \cap B \neq \emptyset$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

☞Exercice 6

dans une population donnée, on choisit au hasard une personne et on s'intéresse aux deux événements suivants :

- A, la personne a visité Paris et $P(A) = 0,7$
- B, la personne a visité Bordeaux et $P(B) = 0,4$
- $P(A \cap B) = 0,2$.

Calculer la probabilité pour que la personne choisie ait visité Paris ou Bordeaux ?

II. C. Contraire

✒ Théorème

Soit A un événement et $\overline{A}$ son contraire, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

☞Démonstration 1

1. Que pouvez-vous dire de $A \cap \overline{A}$? Écrire autrement $P(A \cup \overline{A})$.
2. Que pouvez-vous dire de $A \cup \overline{A}$? En déduire que $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

☞**Exercice 7**
dans une population donnée, on choisit au hasard une personne et on s'intéresse aux deux événements suivants :

- A, la personne a visité Paris et $P(A) = 0,7$
- B, la personne a visité Bordeaux et $P(B) = 0,4$
- $P(A \cap B) = 0,2$.

1. Calculer la probabilité que la personne n'ait pas visité Paris.
2. Calculer la probabilité $P(\overline{A \cap B})$ et interpréter $\overline{A \cap B}$ par une phrase.

III. Cas d'équiprobabilités

III. A. Définition

Définition

On parle d'équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires de l'univers Ω ont la même probabilité p.
On note $|\Omega|$ le nombre d'éléments de Ω.

Théorème

Dans un cas d'équiprobabilité,

- la probabilité d'un événement élémentaire est $p = \dfrac{1}{|\Omega|}$.
- la probabilité d'un événement A (non vide) est $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

☞**Exercice 8**

- On lance une fois un dé non truqué, à six faces. L'univers est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. A est l'événement "obtenir un multiple de 3".
  1. Donner la probabilité de chaque événement élémentaire.
  2. Donner la probabilité de A.
- On lance deux fois une pièce de monnaie. L'univers est $\Omega = \{(P;P);(P;F);(F;P);(F;F)\}$. B est l'événement "obtenir au moins une fois Pile".
  1. Donner la probabilité de chaque événement élémentaire.
  2. Donner la probabilité de B.

☞**Exercice 9**

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :

- A : La carte est un trèfle,
- B : La carte est un as,
- C : La carte est rouge.

1. Donner $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
2. Que pouvez-vous dire de A et C ? Calculer $P(A \cup C)$.
3. Traduire par une phrase l'événement $A \cap B$. Donner $A \cap B$.
4. Traduire par une phrase l'événement $A \cup B$. Calculer $P(A \cup B)$.

☞**Exercice 10**

On lance deux dés et on compte la somme des deux faces obtenues.

1. Donner l'univers Ω de la somme des deux dés.
2. Calculer la probabilité de tous les événements élémentaires.
   On pourra faire un arbre et/ou un tableau pour présenter les résultats.
3. Quel événement élémentaire est le plus probable ?

☞**Exercice 11**

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir

1. Deux fois PILE exactement
2. Au moins une fois PILE.