Exercices : Nombres et intervalles

Exercice 1

1. Combien de minutes font $\dfrac{1}{5}$ d'une heure ?
2. Combien de minutes font $\dfrac{2}{3}$ d'une heure ?
3. Combien d'heures minutes font $\dfrac{15}{4}$ d'une heure ?
4. Combien d'heures minutes font $\dfrac{104}{12}$ d'une heure ?

Exercice 2

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\pi + b\pi$ où a est un entier relatif et b est un nombre rationnel strictement plus grand que -1 et strictement plus petit que 1 :

Exemple : $A = \dfrac{17\pi}{4} = \dfrac{16\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = 4\pi + \dfrac{\pi}{4}$, ici $a = 4$ et $b = \dfrac{1}{4}$

$B = \dfrac{47\pi}{4}$; $C = \dfrac{-29\pi}{6}$; $D = \dfrac{170\pi}{3}$; $E = \dfrac{-21\pi}{2}$.

Exercice 3

L'unité vaut 1 centimètre.
Le but de l'exercice est de construire géométriquement le nombre $\sqrt{6}$, pour placer les nouveaux points vous tournerez dans le même que le sens du triangle initial.

1. Construire un triangle ABC rectangle B de côtés $AB = 1$ et $BC = 1$, puis calculer la longueur exacte de l'hypoténuse AC.
2. Construire un triangle ACD rectangle C de côté $CD = 1$, puis calculer la longueur exacte de l'hypoténuse AD.
3. Construire un triangle ADE rectangle D de côté $CD = 1$, puis calculer la longueur exacte de l'hypoténuse AE.
4. Donner le construction des étapes suivantes pour construire le nombre $\sqrt{6}$.
5. Pour aller plus loin, construire une algorithme sur Scratch permettant de construire le nombre $\sqrt{n}$, où n est un entier naturel (assez petit pour que la taille de l'écran permette sa construction).

Exercice 4

L'unité vaut 1 centimètre.
Le but de l'exercice est de construire géométriquement le nombre $\dfrac{1}{x}$, x étant un nombre réel constructible géométriquement.

1. Soit le nombre de l'exercice précédent, $x = \sqrt{6}$. Construire un segment $[AB]$ de longueur $\sqrt{6}$ (il s'agit d'un report de la longueur trouvée dans l'exercice précédent.)
2. Sur le segment $[AB]$, placer le point I tel que $AI = 1$.
3. Construire un triangle non aplati ABC tel que $AC = 1$.

4. La parallèle à (BC) passant par I coupe $[AC]$ en J.

5. Calculer la longueur exacte du segment $[AJ]$.

6. On remarquant que $\dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$, simplifier $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$ pour ne plus avoir de racine carrée au dénominateur.

☞Exercice 5 ✧

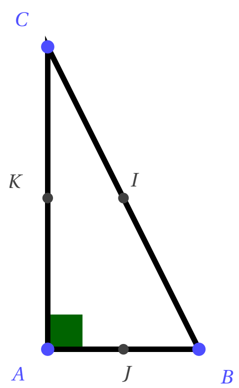
1. Choisissez deux entiers consécutifs a_0 et b_0.
Choisissez deux nombres décimaux a_1 et b_1 compris strictement entre a_0 et b_0 tel que $a_1 < b_1$ et $10(b_1 - a_1) = 1$.
Choisissez deux nombres décimaux a_2 et b_2 compris strictement entre a_1 et b_1 tel que $a_1 < b_1$ et $10^2(b_2 - a_2) = 1$

2. Écrire la prochaine étape de l'algorithme.

3. Si on continue l'algorithme, s'arrête-t-il ? (on ne demande pas de justifier cette affirmation).

☞Exercice 6 ✧✧

L'unité vaut 1 centimètre.
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 1$ et $AC = 2$.
On note I le milieu du segment $[BC]$, J le milieu du segment $[AB]$, K est le milieu du segment $[AC]$.



figure

1. Calculer la longueur exacte du segment $[BC]$.

2. En déduire la longueur exacte du segment $[BI]$.

3. Construire le point E tel que E est sur la demi-droite $[AB)$ et $AE = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Expliquer la construction à partir de la longueur du segment $[BI]$.

4. Construire la droite parallèle à (EK) passant par B, elle coupe le segment $[AC]$ en L. Puis calculer la valeur exacte de la longueur AL.

5. On remarquant que $\dfrac{1}{AE} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})((1-\sqrt{5})}$, développer le dénominateur et simplifier : $\dfrac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})((1-\sqrt{5})}$

☞Exercice 7 ✧

En vélo, un compteur compte le nombre de tours d'une route de diamètre 700 mm :

1. Si le cycliste fait une promenade de 17 500 tours de roues, quelle distance a-t-il parcourue (en km) ?

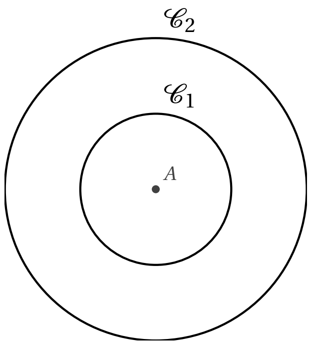
2. Combien de tours de roues permettent de parcourir au moins 1 km ?

☞Exercice 8 ✧

Sur le site Wikipédia on peut lire :

Un terrain de football est un terrain sur lequel est organisée une partie de football. Ses caractéristiques sont définies par la loi du football.
Selon les lois du jeu qui le définissent, le terrain est un rectangle de longueur comprise entre 90 et 120 mètres (100 à 130 yards, l'unité originellement utilisée dans les lois du jeu) et de largeur comprise entre 45 et 90 mètres (50 à 100 yards), soit une surface qui varie de 4 050 m^2 à 10 800 m^2 . Pour les matchs internationaux, il mesure environ 105 mètres sur 68 mètres soit une surface d'environ 7 000 m^2. Il peut être de plusieurs revêtements : pelouse naturelle ou synthétique, graviers, terre.
Justifier les résultats annoncés.

☞Exercice 9 ✧✧



Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont pour centre le point A et pour rayon respectif 1 cm et 2 cm.

1. Combien de cercle de centre A peut-on construire entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$? On note $\mathscr{E}$ l'ensemble de ces cercles.

2. Préciser l'intervalle dans lequel varie le périmètre des cercles de l'ensemble $\mathscr{E}$.

3. Préciser l'intervalle dans lequel varie la surface des cercles de l'ensemble $\mathscr{E}$.

4. Justifier si le cercle de centre A de périmètre 6,2832 cm est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.

☞Exercice 10 ✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(3x+1)(-2x+1)=0$
2. $x(x+1)=0$
3. $3x^2-x=0$
4. $\dfrac{x^2}{x+1}=x+1$

☞**Exercice 11** ✧

1. Écrire les intervalles suivants sous la forme d'inégalités :

(a) $x \in [0\,;\,5]$ (b) $x \in]-1\,;\,0]$ (c) $x \in]-\infty\,;\,8]$ (d) $x \in]1\,;\,+\infty[$

2. Écrire les inégalités suivantes sous la forme d'intervalles :

(a) $x > 12$ (b) $0 < x \leqslant 1$ (c) $x \leqslant 5$ (d) $2 \geqslant x > 1$

☞**Exercice 12** ✧

1. Donner tous les entiers naturels de $\mathbb{N}$ qui appartiennent à l'intervalle $[-5\,;\,4]$.
2. Donner tous les entiers relatifs de $\mathbb{Z}$ qui appartiennent à l'intervalle $]-5\,;\,4[$.
3. Donner tous les nombres décimaux de la forme $\dfrac{a}{10^2}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ qui appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,0,1]$.
4. Donner les fractions de la forme $\dfrac{a}{3}$, avec a entier relatif, qui appartiennent à l'intervalle $[-5\,;\,5]$.
5. Donner les fractions de la forme $\dfrac{a}{6}$, avec a entier relatif, qui appartiennent à l'intervalle $[-3\,;\,2]$.
6. Donner les fractions de la forme $\dfrac{a}{4}$, avec a entier relatif, qui appartiennent à l'intervalle $[-2\,;\,2[$.

☞**Exercice 13** ✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$:

1. $2x+1>0$
2. $2x-5>3x-7$
3. $x+1 \leqslant 4x-8$

☞**Exercice 14** ✧✧

Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'ensemble $]0\,;\,1[\cap]0,5\,;\,+\infty[$ est l'ensemble $]0\,;\,+\infty[$.
2. Si $x<0$ et $x>-1$ alors $x \in]-1\,;\,0[$.
3. Si $x \in]-\infty\,;\,0] \cap [0\,;\,+\infty[$ alors $x=0$.

☞**Exercice 15** ✧✧✧

Ensemble de Cantor (mathématicien allemand 1845 - 1918) :
On considère l'intervalle $K_0 = [0\,;\,1]$.
On partage cet intervalle en trois parties égales et on retire l'intervalle ouvert centrale $\left]\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right[$, il reste l'ensemble $K_1 = \left[0\,;\,\dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}\,;\,1\right]$.
Pour passer à K_2 on retire à chacun des segments qui forment K_1 un intervalle ouvert central d'amplitude $\dfrac{1}{9}$. On obtient une réunion de 4 segments disjoints, chacun de longueur $\dfrac{1}{9}$, précisément : $\left[0\,;\,\dfrac{1}{9}\right]$, $\left[\dfrac{2}{9}\,;\,\dfrac{3}{9}\right]$, $\left[\dfrac{6}{9}\,;\,\dfrac{7}{9}\right]$ et $\left[\dfrac{8}{9}\,;\,\dfrac{9}{9}\right]$, avec $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{9}{9}=1$.

1. Sur trois axes des abscisses différents mais de même échelle, représenter les ensembles K_0, K_1 et K_2.
2. Déterminer $K_0 \cap K_1$, puis $K_1 \cap K_2$ puis $K_0 \cap K_1 \cap K_2$.
3. Déterminer l'ensemble K_3.