# Variable aléatoire
# Définition et propriétés, espérance et écart-type

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

# Exemple et définition

On lance deux fois une pièce de monnaie bien équilibrée. La participation au jeu est gratuite :

- Si les deux faces sont PILE alors on gagne 3 euros.
- Si au moins une face est PILE alors on perd 2 euros.
- Sinon rien ne se passe.

L'univers de l'expérience aléatoire est : $\Omega = \{(PP)\ ;\ (PF)\ ;\ (FP)\ ;\ (FF)\}$.

| Événements | $X$ | Gains réels en euros |
|---|---|---|
| $(PP)$ | $\longmapsto$ | $X((PP)) = 3$ |
| $(PF)$ | $\longmapsto$ | $X((PF)) = -2$ |
| $(FP)$ | $\longmapsto$ | $X((FP)) = -2$ |
| $(FF)$ | $\longmapsto$ | $X((FF)) = 0$ |

On définit alors une **fonction** $X$**, appelée variable aléatoire**, qui a chaque événement de l'univers associe une valeur réelle dans l'ensemble $\{-2\ ;\ 0\ ;\ 3\}$, **les valeurs prises par** $X$

# Exemple et définition

L'univers de l'expérience aléatoire est : $\Omega = \{(PP)\ ;\ (PF)\ ;\ (FP)\ ;\ (FF)\}$.

| Événements | $X$ | Gains réels en euros |
|---|---|---|
| $(PP)$ | $\longmapsto$ | $X((PP)) = 3$ |
| $(PF)$ | $\longmapsto$ | $X((PF)) = -2$ |
| $(FP)$ | $\longmapsto$ | $X((FP)) = -2$ |
| $(FF)$ | $\longmapsto$ | $X((FF)) = 0$ |

Déterminer la **loi de probabilité de** $X$ revient à déterminer les probabilités associées à toutes les valeurs prises par $X$.

- $P(X = 3) = P((PP)) = \dfrac{1}{4}$.
- $P(X = -2) = P(\{(PF)\ ;\ (FP)\}) = P(\{(PF)\}) + P(\{(FP)\}) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
- $P(X = 0) = P((FF)) = \dfrac{1}{4}$.

Remarque : la somme des probabilités de la loi de $X$ est 1.

# Espérance, exemple et définition

La **loi de** $X$ :

- $P(X=3)=\dfrac{1}{4}$.
- $P(X=-2)=\dfrac{1}{2}$.
- $P(X=0)=\dfrac{1}{4}$.

**L'espérance** $E(X)$ de la variable aléatoire $X$ est : $\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=xi)$

$$E(X)=3\times P(X=3)+(-2)\times P(X=-2)+0\times P(X=0)$$
$$E(X)=3\times\frac{1}{4}+(-2)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}$$
$$E(X)=-\frac{1}{4}=-0,25$$

*En jouant une partie du jeu, on peut espérer perdre* $0,25$ *euros, en moyenne, par partie.*
*Ainsi, si on joue 1 000 fois on peut espérer perdre* $250$ *euros.*

# Écart-type, exemple et définition

La **loi de** $X$ :

- $P(X=3)=\dfrac{1}{4}$.
- $P(X=-2)=\dfrac{1}{2}$.
- $P(X=0)=\dfrac{1}{4}$.
- $E(x)=0,25$.

**La variance** $V(X)$ de la variable aléatoire $X$ est : $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2\times P(X=x_i)$

$V(X)=(3-(-0,25))^2\times P(x=3)+(-2-(-0,25))^2\times P(X=-2)+(0-(-0,25))^2\times P(X=0)$

$V(X)=4{,}1875$

**L'écart-type** $\sigma(X)$ de la variable aléatoire $X$ est : $\sqrt{V(X)}$

$\sigma(X)=\sqrt{4{,}1875}\simeq 2,05.$

FIN