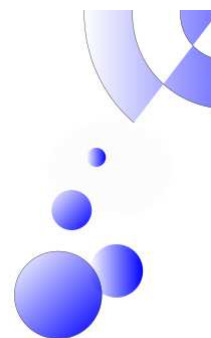
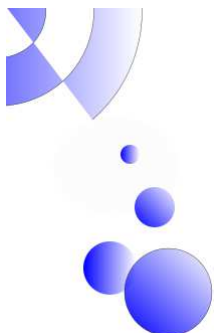




Table des Matières

I. Introduction	1
II. Variable aléatoire et loi de probabilité	1
III. Espérance d'une variable aléatoire	2
IV. Variance et écart-type d'une variable aléatoire	2





I. Introduction

🌀 Activité 1

On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
Si PILE apparaît on gagne 10 euros, si FACE apparaît on perd 5 euros.

1. Déterminer toutes les gains possibles.
2. Calculer la probabilité de tous ces gains possibles.



II. Variable aléatoire et loi de probabilité

🌀 Définition

Soit une probabilité P définie sur un univers fini Ω à valeur dans $[0 ; 1]$ et une application X de Ω dans \mathbb{R} qui à tout événement A_i de l'univers associe un nombre réel x_i , i étant un nombre entier naturel compris entre 1 et n .

$$\begin{aligned} P: \Omega &\rightarrow [0 ; 1] \\ A_i &\mapsto P(A_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ A_i &\mapsto x_i = X(A_i) \end{aligned}$$

On note $P(X = x_i)$ le nombre $P(A_i)$ tel que A_i est l'ensemble des événements antécédents de x_i par X .

On note $P(X \leq x_i)$ le nombre $P(A_i)$ tel que A_i est l'ensemble des événements antécédents de tous les x_j par X tels que $x_j \leq x_i$ (on définit de manière analogue les autres inégalités).

X est appelée variable aléatoire et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est l'ensemble des n probabilités $P(X = x_i)$.

Exemple

On lance simultanément deux dés à six faces bien équilibrés, numéroté de 1 à 6. On s'intéresse à la somme des numéros des faces.

$$\Omega = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (1; 6); (2; 1); \dots; (6; 5); (6; 6)\}$$

Ω possède 36 couples, 36 événements élémentaires équiprobables.

$$X((1; 1)) = 2; X((1; 2)) = 3; X((1; 3)) = 4; \dots; X((1; 6)) = 7; X((2; 1)) = 3; \dots; X((6; 5)) = 11; X((6; 6)) = 12$$

Ainsi,

$$P(X = 3) = P[(1; 2) \cup (2; 1)] = P((1; 2)) + P((2; 1)) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

$X = 3$ correspond aux antécédents de 3 par X , soit à la réunion des événements élémentaires $(1; 2)$ et $(2; 1)$ de Ω .

$$P(X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{1}{12}$$

$X \leq 3$ correspond aux antécédents de 2 et de 3 par X , soit à la réunion des événements élémentaires $(1; 1); (1; 2)$ et $(2; 1)$ de Ω .

Remarque

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

III. Espérance d'une variable aléatoire

Définition

Soit $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P . On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire X , notée $E(X)$ la valeur suivante :

$$E(X) = P(X = x_1) x_1 + P(X = x_2) x_2 + \dots + P(X = x_n) x_n = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) x_i$$

Exercice 1

On reprend l'exercice de l'activité :

On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

Si PILE apparaît on gagne 10 euros, si FACE apparaît on perd 5 euros. On note X la variable aléatoire du gain.

En reprenant les résultats de l'activité 1,

1. Calculer l'espérance $E(X)$.
2. Est-ce que le jeu est équitable ? Justifier ?
3. Comment rendre le jeu équitable ?

Propriété

Soit a et b deux nombres réels :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

☞ Démonstration 1

Laissée en exercice

IV. Variance et écart-type d'une variable aléatoire

☞ Définition

Soit $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P .
On appelle variance mathématique d'une variable aléatoire X , notée $V(X)$ la valeur suivante :

$$V(X) = P(X = x_1)(x_1 - E(X))^2 + P(X = x_2)(x_2 - E(X))^2 + \dots + P(X = x_n)(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n P(X = x_i)(x_i - E(X))^2$$

L'écart-type $\sigma(X)$ est égal à $\sqrt{V(X)}$.

☞ Propriété

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Soit a et b deux nombres réels :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

☞ Exercice 2

On reprend l'exercice de l'activité :

On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

Si PILE apparaît on gagne 10 euros, si FACE apparaît on perd 5 euros. On note X la variable aléatoire du gain.

En reprenant les résultats précédent,

Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

☞ Démonstration 2

Laissée en exercice

☞ Exercice 3

Soit $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P .

Étudier la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto E((X - x)^2) \end{aligned}$$