Variable aléatoire

Table des Matières

Variable aléatoire

I. Introduction

Activité 1

On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
Si PILE apparaît on gagne 10 euros, si FACE apparaît on perd 5 euros.

1. Déterminer toutes les gains possibles.
2. Calculer la probabilité de tous ces gains possibles.

II. Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition

Soit une probabilité P définie sur un univers fini Ω à valeur dans $[0\,;\,1]$ et une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui a tout événement A_i de l'univers associe un nombre réel x_i, i étant un nombre entier naturel compris entre 1 et n.

$$\begin{array}{rccl} P: & \Omega & \to & [0\,;\,1] \\ & A_i & \mapsto & P(A_i) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} X: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & A_i & \mapsto & x_i = X(A_i) \end{array}$$

On note $P(X = x_i)$ le nombre $P(A_i)$ tel que A_i est l'ensemble des événements antécédents de x_i par X.
On note $P(X \leqslant x_i)$ le nombre $P(A_i)$ tel que A_i est l'ensemble des événements antécédents de tous les x_j par X tels que $x_j \leqslant x_i$ (on définit de manière analogue les autres inégalités).
X est appelée variable aléatoire et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est l'ensemble des n probabilités $P(X = x_i)$.

Exemple

On lance simultanément deux dés à six faces bien équilibrés, numéroté de 1 à 6. On s'intéresse à la somme des numéros des faces.

$$\Omega = \{(1\,;\,1)\,;\,(1\,;\,2)\,;\,(1\,;\,3)\,;\,(1\,;\,4)\,;\,(1\,;\,5)\,;\,(1\,;\,6)\,;\,(2\,;\,1)\,;\,\ldots\,;\,(6\,;\,5)\,;\,(6\,;\,6)\}$$

Ω possède 36 couples, 36 événements élémentaires équiprobables.

$X((1\,;\,1)) = 2\,;\, X((1\,;\,2)) = 3\,;\, X((1\,;\,3)) = 4\,;\,\ldots\,;\, X((1\,;\,6)) = 7\,;\, X((2\,;\,1)) = 3\,;\,\ldots\,;\, X((6\,;\,5)) = 11\,;\, X((6\,;\,6)) = 12$

Ainsi,

$$P(X=3) = P[(1\,;\,2)\cup(2\,;\,1)] = P((1\,;\,2)+P(2\,;\,1) = \frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

$X = 3$ correspond aux antécédents de 3 par X, soit à la réunion des événements élémentaires $(1\,;\,2)$ et $(2\,;\,1)$ de Ω.

$$P(X\leqslant 3) = P(X=2)+P(X=3) = \frac{1}{36}+\frac{1}{18} = \frac{1}{12}$$

$X \leqslant 3$ correspond aux antécédents de 2 et de 3 par X, soit à la réunion des événements élémentaires $(1\,;\,1)\,;\,(1\,;\,2)$ et $(2\,;\,1)$ de Ω.

Remarque

$P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_n) = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$

III. Espérance d'une variable aléatoire

Définition

Soit $X = \{x_1;x_2;\ldots;x_n\}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.
On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$ la valeur suivante :

$$E(X) = P(X=x_1)\,x_1 + P(X=x_2)\,x_2 + \ldots + P(X=x_n)\,x_n = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\,x_i$$

Exercice 1

On reprend l'exercice de l'activité :

On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
Si PILE apparaît on gagne 10 euros, si FACE apparaît on perd 5 euros. On note X la variable aléatoire du gain.
En reprenant les résultats de l'activité 1,

1. Calculer l'espérance $E(X)$.
2. Est-ce que le jeu est équitable ? Justifier ?
3. Comment rendre le jeu équitable ?

Propriété

Soit a et b deux nombres réels :

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

☞**Démonstration 1**

Laissée en exercice

IV. Variance et écart-type d'une variable aléatoire

✒ Définition

Soit $X = \{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.
On appelle variance mathématique d'une variable aléatoire X, notée $V(X)$ la valeur suivante :

$$V(X) = P(X = x_1)(x_1 - E(X))^2 + P(X = x_2)(x_2 - E(X))^2 + ... + P(X = x_n)(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)(x_n - E(X))^2$$

L'écart-type $\sigma(X)$ est égal à $\sqrt{V(X)}$.

✒ Propriété

- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Soit a et b deux nombres réels :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

☞**Exercice 2**

On reprend l'exercice de l'activité :

On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
Si PILE apparaît on gagne 10 euros, si FACE apparaît on perd 5 euros. On note X la variable aléatoire du gain.
En reprenant les résultats précédent,
Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

☞**Démonstration 2**

Laissée en exercice

☞**Exercice 3**

Soit $X = \{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.
Étudier la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & E((X - x)^2) \end{array}$$

.