Trigonométrie
Cercle trigonométrique, Radian

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

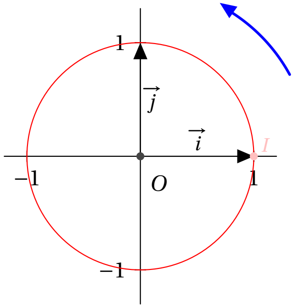
Cercle trigonométrique, définition

Soit un repère **orthonormé** $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$.

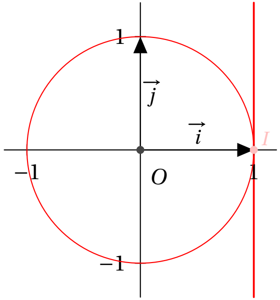
On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre O et de rayon 1.

Le point I de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ est appelé origine du cercle.

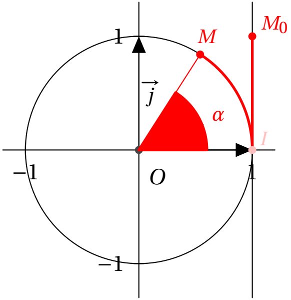
Le sens trigonométrique (sens positif) du cercle est le sens contraire de celui de la rotation des aiguilles d'une montre.



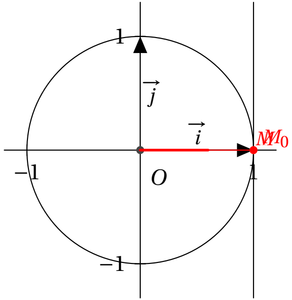
$\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ repère orthonormé.
On considère le cercle trigonométrique et la droite des nombres réels $\left(I, \overrightarrow{j}\right)$



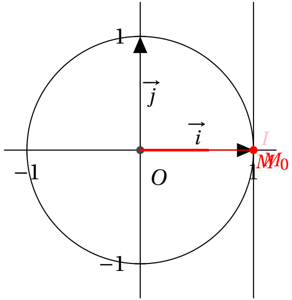
À chaque point M_0 de la droite $\left(I, \overrightarrow{j}\right)$ on associe un unique point du cercle M tel que la longueur IM_0 soit égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$, lequel définit un secteur angulaire α noté $\alpha = \left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$



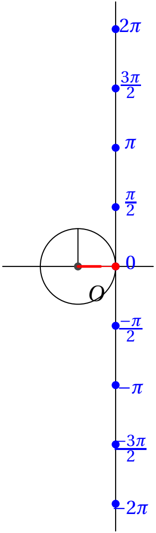
À chaque point M_0 de la droite $\left(I, \overrightarrow{j}\right)$ on associe un unique point du cercle M tel que la longueur IM_0 soit égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$, lequel définit un secteur angulaire α noté $\alpha = \left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$.

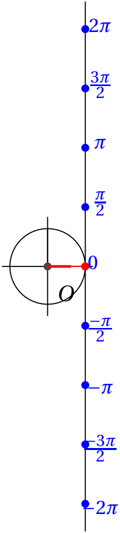


À chaque point M_0 de la droite $\left(I, \overrightarrow{j}\right)$ on associe un unique point du cercle M tel que la longueur IM_0 soit égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$, lequel définit un secteur angulaire α noté $\alpha = \left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$.

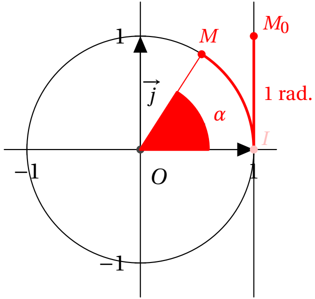


Cercle trigonométrique et droite des réels





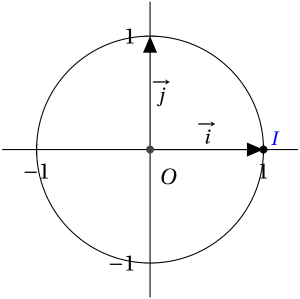
Pour M_0 de coordonnée $(1\ ;\ 1)$ de la droite $\left(I, \overrightarrow{j}\right)$ on associe l'unique point du cercle M tel que la longueur $IM_0 = \overset{\frown}{IM} = 1$, lequel définit un secteur angulaire α noté $\alpha = \left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = 1$ rad.



Cercle trigonométrique et radian

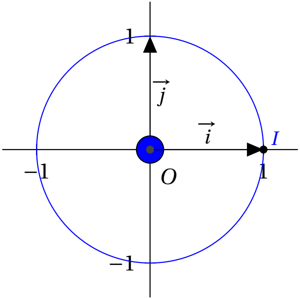
Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



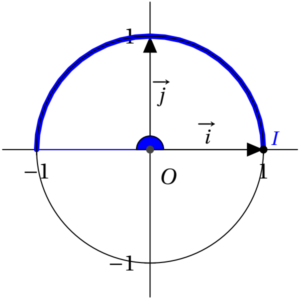
Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



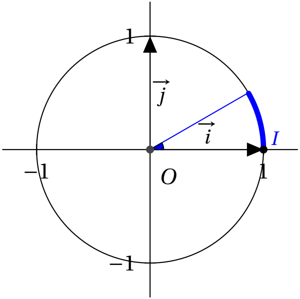
Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

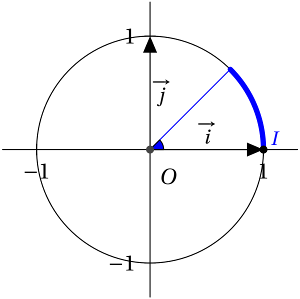
Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



Cercle trigonométrique et radian

Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

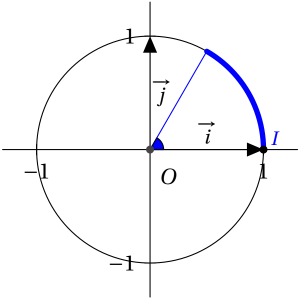
Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



Cercle trigonométrique et radian

Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

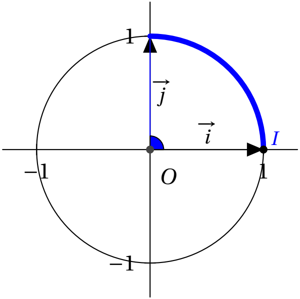
Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



Cercle trigonométrique et radian

Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

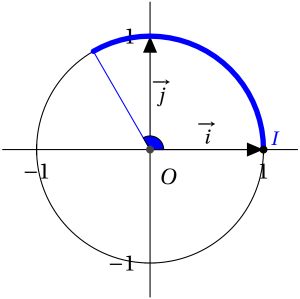
Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



Cercle trigonométrique et radian

Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

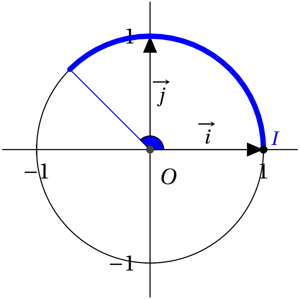
Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



Cercle trigonométrique et radian

Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

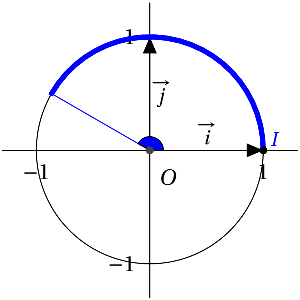
Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



Cercle trigonométrique et radian

Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

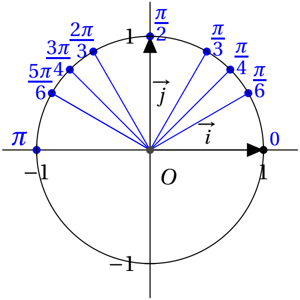
Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



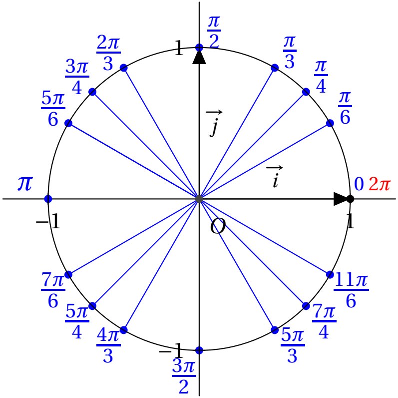
Cercle trigonométrique et radian, mesures à connaitre

Sur le cercle trigonométrique, dans le sens trigonométrique, à un angle on associe la longueur de l'arc de cercle :

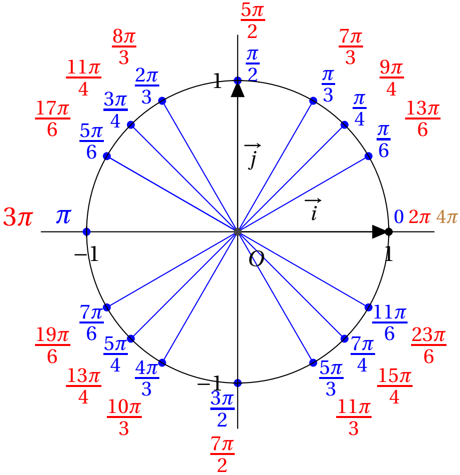
Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$



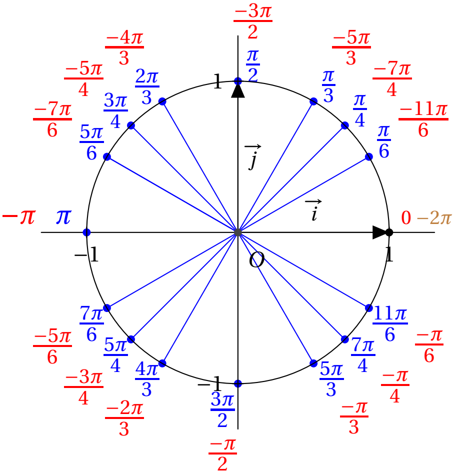
Cercle trigonométrique et radian, mesures à connaitre



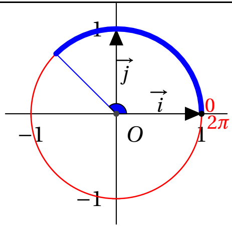
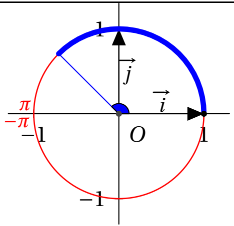
Cercle trigonométrique et radian, mesures à connaitre



Cercle trigonométrique et radian, mesures à connaitre



Un angle α au nombre de tour près a une mesure unique dans les intervalles suivants :

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$[0 ; 2\pi[$</td><td>$]-\pi ; \pi]$</td></tr>
<tr><td></td><td>Mesure principale de α</td></tr>
</table>

Placement d'un angle sur le cercle trigonométrique à partir des valeurs remarquées, exemple

On souhaite placer l'angle $\dfrac{261\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique.

Un tour est 2π soit $\dfrac{8\pi}{4}$.

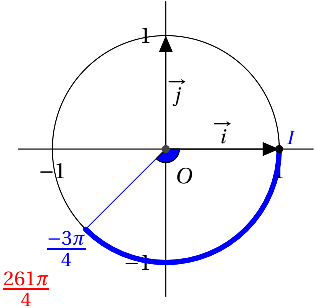
On souhaite trouver k dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & -\pi < \dfrac{261\pi}{4} - k.tours \leqslant \pi & \\
\Longleftrightarrow & -\pi < \dfrac{261\pi}{4} - k \times \dfrac{8\pi}{4} \leqslant \pi & \\
\Longleftrightarrow & -4 < 261 - 8k \leqslant 4 & \times \dfrac{4}{\pi} \\
\Longleftrightarrow & -265 < -8k \leqslant -257 & -261 \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{265}{8} > k \geqslant \dfrac{257}{8} & \div(-8) \\
\Longleftrightarrow & 33,125 > k \geqslant 32,125 & \div(-8)
\end{array}$$

On trouve $k = 33$, Ainsi l'angle équivaut à $\dfrac{261\pi}{4} - 33 \times \dfrac{8\pi}{4} = \dfrac{-3\pi}{4}$.

Placement d'un angle sur le cercle trigonométrique à partir des valeurs remarquées, exemple

On note alors $\frac{261\pi}{4} \equiv \frac{-3\pi}{4}\ (2\pi)$.



Conversions degré radian, exemples

Les unités de degré et de radian sont proportionnelles :

Angle en degré	0	360	180	30	45	60	90	120	135	150
Angle en radian	0	2π	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

$$\text{Angle en dégré} \times \frac{\pi}{180} = \text{Angle en radian}$$

$$\text{Angle en radian} \times \frac{180}{\pi} = \text{Angle en dégré}$$

Exemples :

$$1 \text{ rad.} \longmapsto \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

$$2,5 \text{ rad.} \longmapsto \left(2,5 \times \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \simeq 143,24^{\circ}$$

$$20^{\circ} \longmapsto 20 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad.} = \frac{\pi}{9} \text{ rad.}$$

FIN