

Trigonométrie

Équations et Inéquations avec cosinus et sinus

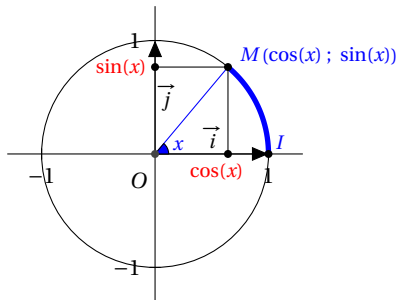
Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

Soit un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On construit le **cercle trigonométrique** et le point I de coordonnées $(0; 1)$.

Soit le point M du cercle trigonométrique, tel que $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.



Équations avec cosinus et sinus

On souhaite résoudre l'équation $\cos(x) = \cos(\alpha)$, puis l'équation $\sin(x) = \sin(\alpha)$ pour x réel :

$\cos(x) = \cos(\alpha)$	$\sin(x) = \sin(\alpha)$
$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + \pi + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Équations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\cos(x) = 0,5$, puis l'équation $\sin(x) = 0,5$ pour x réel :

On remarque que $\cos(\frac{\pi}{3}) = 0,5$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5$:

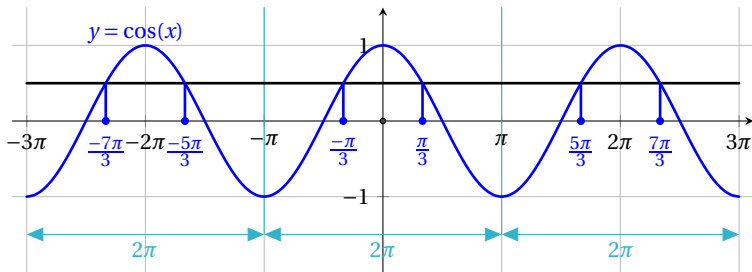
$\cos(x) = 0,5 = \cos(\frac{\pi}{3})$	$\sin(x) = 0,5 = \sin(\frac{\pi}{6})$
$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Équations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\cos(x) = 0,5$ pour x réel :

On remarque que $\cos(\frac{\pi}{3}) = 0,5$:

$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \cos(x)$

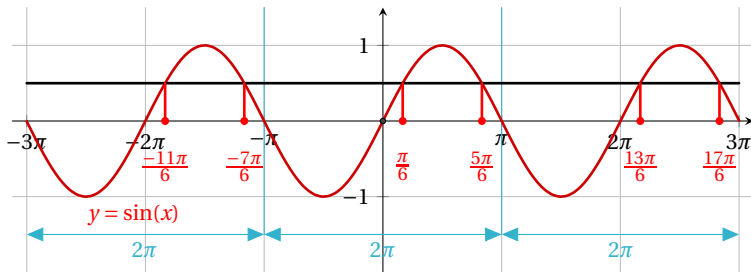


Équations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\sin(x) = 0,5$ pour x réel :

On remarque que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5$:

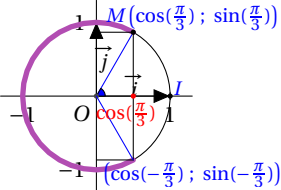
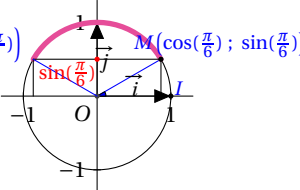
$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \sin(x)$



Inéquations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\cos(x) < 0,5$, puis l'équation $\sin(x) \geq 0,5$ pour x réel :

On remarque que $\cos(\frac{\pi}{3}) = 0,5$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5$:

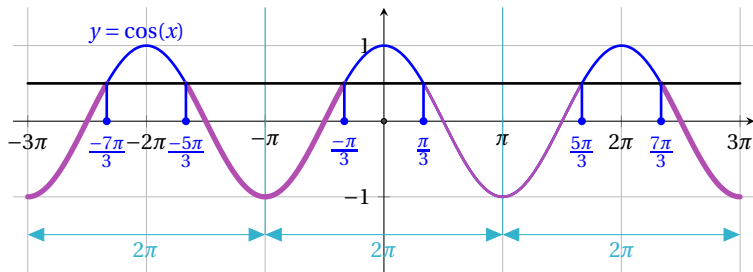
$\cos(x) < \cos(\frac{\pi}{3})$	$\sin(x) \geq \sin(\frac{\pi}{6})$
	
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right[$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]$

Inéquations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\cos(x) < 0,5$ pour x réel :

On remarque que $\cos(\frac{\pi}{3}) = 0,5$:

$\cos :$	\mathbb{R}	\rightarrow	\mathbb{R}
	x	\rightarrow	$y = \cos(x)$



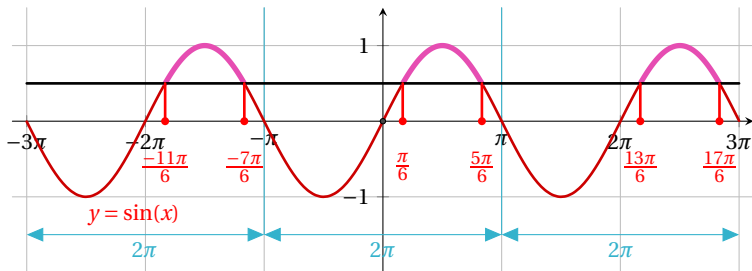
$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right[$$

Inéquations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\sin(x) \geq 0,5$ pour x réel :

On remarque que $\sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5$:

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \sin(x)$

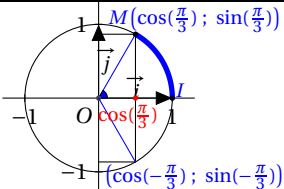
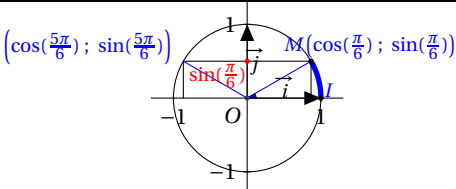


$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]$$

Équations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\cos(3x) = 0,5$, puis l'équation $\sin(2x) = 0,5$ pour $x \in [-\pi ; 2\pi]$ réel :

On remarque que $\cos(\frac{\pi}{3}) = 0,5$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5$:

$\cos(3x) = 0,5 = \cos(\frac{\pi}{3})$	$\sin(2x) = 0,5 = \sin(\frac{\pi}{6})$
	
$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Équations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\cos(3x) = 0,5$, puis l'équation $\sin(2x) = 0,5$ pour $x \in [-\pi ; 2\pi]$ réel :

On remarque que $\cos(\frac{\pi}{3}) = 0,5$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5$:

$\cos(3x) = 0,5 = \cos(\frac{\pi}{3})$	$\sin(2x) = 0,5 = \sin(\frac{\pi}{6})$
$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

Équations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\cos(3x) = 0,5$ pour $x \in [-\pi ; 2\pi]$ réel :

$$\cos(3x) = 0,5 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

On cherche les entiers relatifs k tels que :

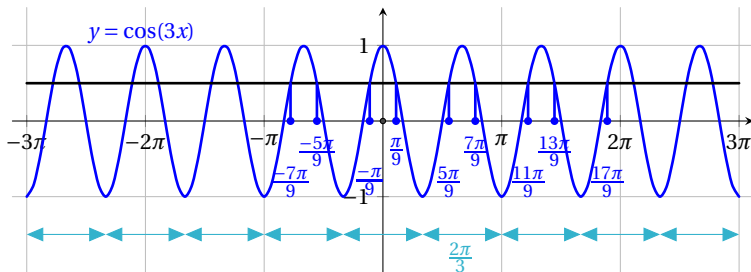
$$\begin{array}{l|l} -\pi \leq \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi & -\pi \leq -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi \\ \Leftrightarrow -\frac{10\pi}{9} \leq \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{17\pi}{9} & \Leftrightarrow -\frac{8\pi}{9} \leq \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{19\pi}{9} \\ \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq k \leq \frac{17}{6} & \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq k \leq \frac{19}{6} \\ \Leftrightarrow k \in \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\} & \Leftrightarrow k \in \{-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\} \\ \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-5\pi}{9} ; \frac{\pi}{9} ; \frac{7\pi}{9} ; \frac{13\pi}{9} \right\} & \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-7\pi}{9} ; \frac{-\pi}{9} ; \frac{5\pi}{9} ; \frac{11\pi}{9} ; \frac{17\pi}{9} \right\} \\ & x \in \left\{ \frac{-7\pi}{9} ; \frac{-5\pi}{9} ; \frac{-\pi}{9} ; \frac{\pi}{9} ; \frac{5\pi}{9} ; \frac{7\pi}{9} ; \frac{11\pi}{9} ; \frac{13\pi}{9} ; \frac{17\pi}{9} \right\} \end{array}$$

Équations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\cos(3x) = 0,5$ pour $x \in [-\pi ; 2\pi]$:

On remarque que $\cos(\frac{3 \times \pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = 0,5$:

$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \cos(3x)$

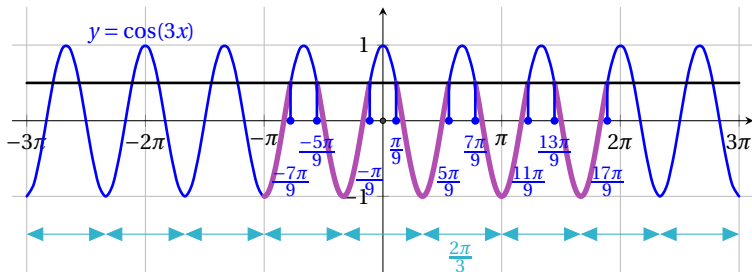


Inéquations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\cos(3x) < 0,5$ pour $x \in [-\pi ; 2\pi]$:

On remarque que $\cos(\frac{3 \times \pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = 0,5$:

$$\begin{array}{l} \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = \cos(3x) \end{array}$$



$$x \in \left[-\pi ; \frac{-7\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{-5\pi}{9} ; \frac{-\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{\pi}{9} ; \frac{5\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{9} ; \frac{11\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{9} ; \frac{17\pi}{9}\right]$$

Équations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\sin(2x) = 0,5$ pour $x \in [-\pi ; 2\pi]$ réel :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(2x) = 0,5 = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

On cherche les entiers relatifs k tels que :

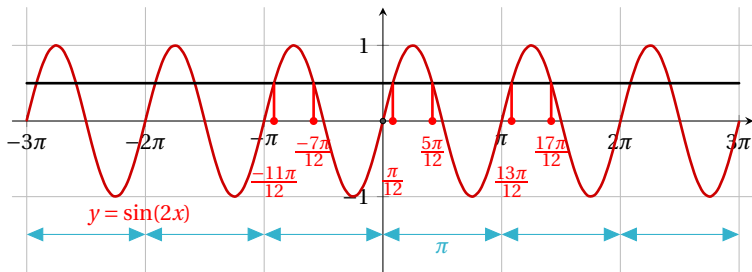
$$\begin{array}{l|l} \Leftrightarrow -\pi \leq \frac{\pi}{12} + k\pi \leq 2\pi & \Leftrightarrow -\pi \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq 2\pi \\ \Leftrightarrow -\frac{13\pi}{12} \leq k\pi \leq \frac{23\pi}{12} & \Leftrightarrow -\frac{17\pi}{12} \leq k\pi \leq \frac{19\pi}{12} \\ \Leftrightarrow -\frac{13}{12} \leq k \leq \frac{23}{12} & \Leftrightarrow -\frac{17}{12} \leq k \leq \frac{19}{12} \\ \Leftrightarrow k \in \{-1 ; 0 ; 1\} & \Leftrightarrow k \in \{-1 ; 0 ; 1\} \\ \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-11\pi}{12} ; \frac{\pi}{12} ; \frac{13\pi}{12} \right\} & \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-7\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12} ; \frac{17\pi}{12} \right\} \\ & x \in \left\{ \frac{-11\pi}{12} ; \frac{-7\pi}{12} ; \frac{\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12} ; \frac{13\pi}{12} ; \frac{17\pi}{12} \right\} \end{array}$$

Équations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\sin(x) = 0,5$ pour $x \in [-\pi ; 2\pi]$:

On remarque que $\sin(\frac{2 \times \pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5$:

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \sin(2x)$

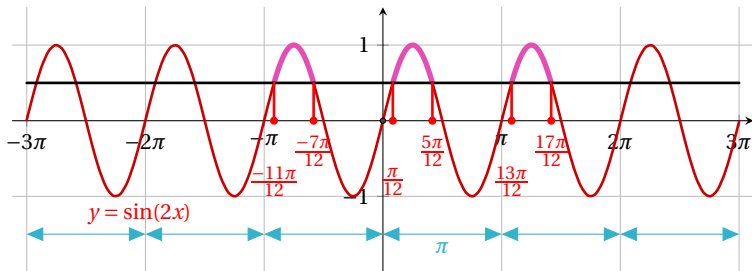


Inéquations avec cosinus et sinus, exemples

On souhaite résoudre l'équation $\sin(x) \geq 0,5$ pour $x \in [-\pi; 2\pi]$:

On remarque que $\sin(\frac{2 \times \pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5$:

$$\begin{array}{l} \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = \sin(2x) \end{array}$$



$$x \in \left[-\frac{11\pi}{12} ; -\frac{7\pi}{12} \right] \cup \left[\frac{\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12} \right] \cup \left[\frac{13\pi}{12} ; \frac{17\pi}{12} \right]$$

FIN

Temporary page!

\LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because \LaTeX now knows how many pages to expect for this document.