Trigonométrie
Cercle trigonométrique, cosinus, sinus

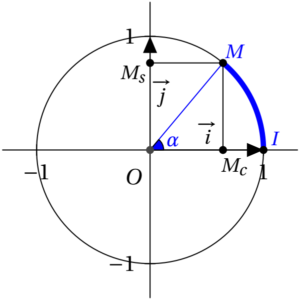
Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Soit un repère **orthonormé** $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

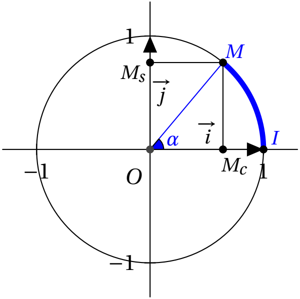
On construit le **cercle trigonométrique** et le point I de coordonnées $(0 ; 1)$.

Soit le point M du cercle trigonométrique, tel que $\left(\vec{i} ; \overrightarrow{OM}\right) = \widehat{IOM} = \alpha$ avec $\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

M_c est le projeté orthogonal de M sur la droite $\left(O, \vec{i}\right)$ et M_s est le projeté orthogonal de M sur la droite $\left(O, \vec{j}\right)$: $M\left(M_c ; M_s\right)$.



Cosinus, sinus, définition



Dans le triangle OM_cM rectangle en M_c :

- $\cos(\alpha) = \dfrac{OM_c}{OM} = \dfrac{OM_c}{1} = OM_c$,
- $\sin(\alpha) = \dfrac{MM_c}{OM} = \dfrac{MM_c}{1} = MM_c = OM_s$.

Le point M a pour coordonnées $(\cos(\alpha)\ ;\ \sin(\alpha))$.

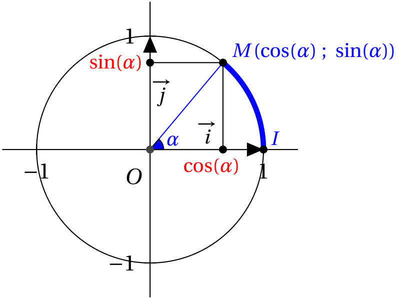
Cosinus, sinus, définition

Soit un repère **orthonormé** $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On construit le **cercle trigonométrique** et le point I de coordonnées $(0 ; 1)$.

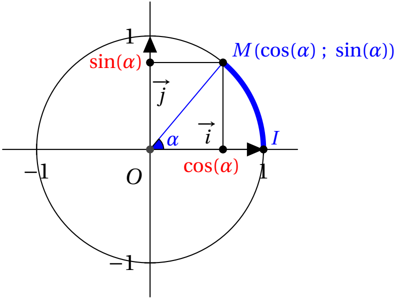
Soit le point M du cercle trigonométrique, tel que $\left(\vec{i} ; \overrightarrow{OM}\right) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\cos(\alpha)$ est l'abscisse du point M,
- $\sin(\alpha)$ est l'ordonnée du point M,
- $M\,(cos(\alpha) ; \sin(\alpha))$



Cosinus, sinus, définition

$\alpha \in \mathbb{R}$:

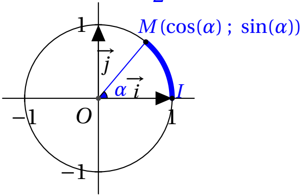


$$-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$$

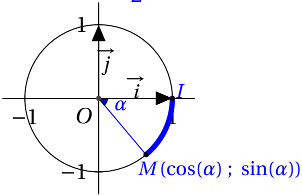
Cosinus, sinus, propriétés

$\alpha \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$



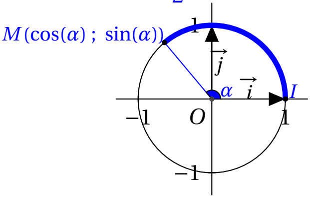
$\cos(\alpha) > 0$ et $\sin(\alpha) > 0$

$\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[$



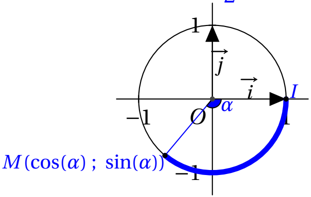
$\cos(\alpha) > 0$ et $\sin(\alpha) < 0$

$\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$



$\cos(\alpha) < 0$ et $\sin(\alpha) > 0$

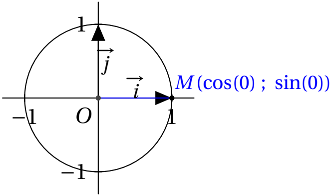
$\alpha \in \left]-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{2}\right[$



$\cos(\alpha) < 0$ et $\sin(\alpha) < 0$

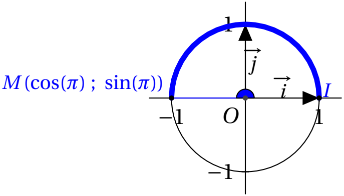
Cosinus, sinus, propriétés

$\alpha = 0$



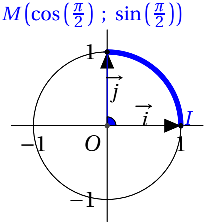
$\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$

$\alpha = \pi$



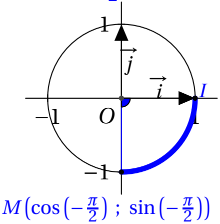
$\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$



$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

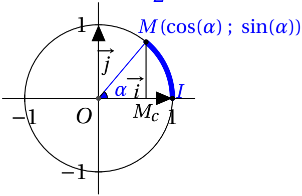
$\alpha = -\frac{\pi}{2}$



$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

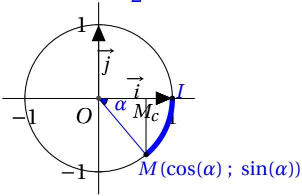
Cosinus, sinus, propriétés

$$\alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$



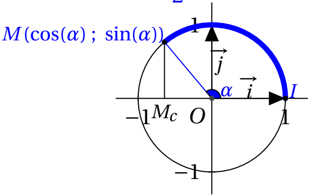
$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$$

$$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$$



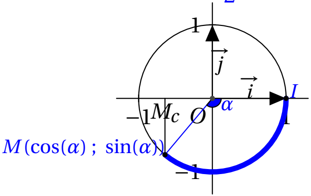
$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$$

$$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$$



$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$$

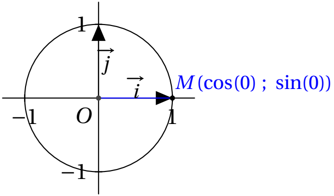
$$\alpha \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$$



$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$$

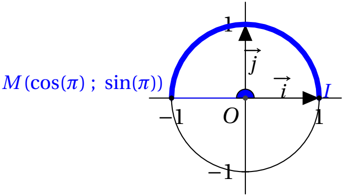
Cosinus, sinus, propriétés

$\alpha = 0$



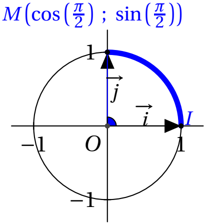
$\cos^2(0) + \sin^2(0) = 1$

$\alpha = \pi$



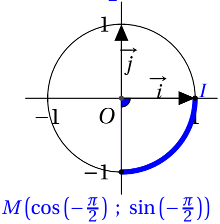
$\cos^2(\pi) + \sin^2(\pi) = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$



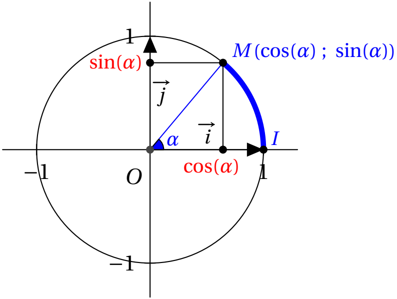
$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\alpha = -\frac{\pi}{2}$



$\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$

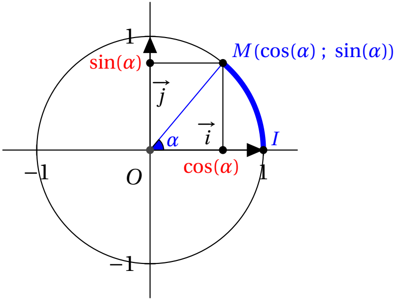
$\alpha \in \mathbb{R}$:



$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Cosinus, sinus, propriétés

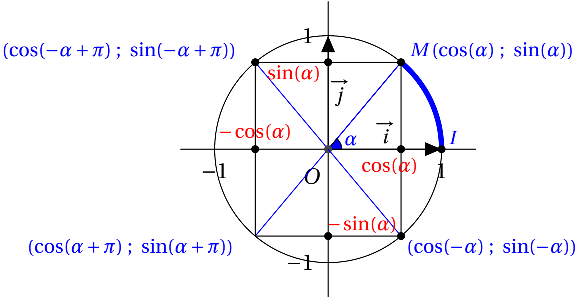
$\alpha \in \mathbb{R}$:



$$\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$$

Cosinus, sinus, propriétés

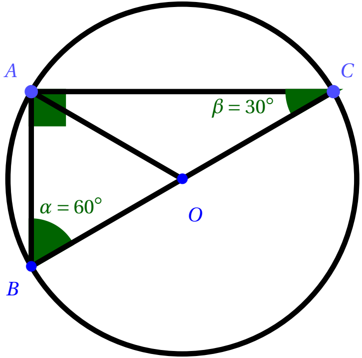
$\alpha \in \mathbb{R}$:



$\cos(-\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$ $\sin(-\alpha+\pi) = \sin(\alpha)$	
$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$ $\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

Cosinus, sinus, valeurs remarquables

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 60°$ et $BC = 1$.
On a alors $\widehat{ACB} = 30°$.
O est le milieu du segment $[BC]$



Le cercle de diamètre $[BC]$ est circonscrit au triangle ABC car ABC est rectangle en A.
$[AO]$ et $[OB]$ sont deux rayons de ce cercle, ainsi $AO = OB$ et AOB est donc un triangle isocèle en O. On a donc $\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = 60°$. Ainsi $\widehat{AOB} = 60°$ et AOB est un triangle équilatéral.
$AB = OB = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Avec le théorème de Pythagore,
$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$
$AC = \sqrt{\dfrac{4}{4} - \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

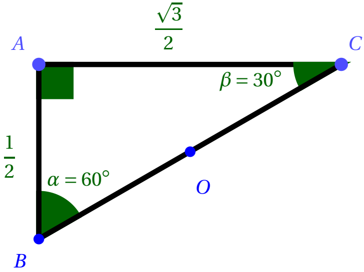
Cosinus, sinus, valeurs remarquables

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 60°$ et $BC = 1$.

On a alors $\widehat{ACB} = 30°$.

O est le milieu du segment $[BC]$

On a $AB = \dfrac{1}{2}$ et $AC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



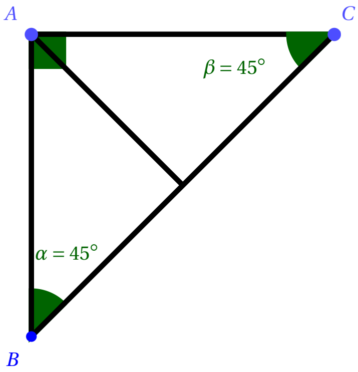
$$\cos(60) = \frac{AB}{BC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(60) = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(30) = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(30) = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 45°$ et $BC = 1$.
On a alors $\widehat{ACB} = 45°$ et ABC est isocèle rectangle en A.

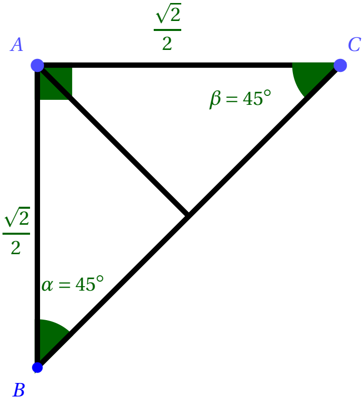


Avec le théorème de Pythagore,
$AB^2 + AC^2 = BC^2 = 1$
$2AB^2 = 1$
$AB^2 = \dfrac{1}{2}$
$AB = AC = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Cosinus, sinus, valeurs remarquables

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 45°$ et $BC = 1$.
On a alors $\widehat{ACB} = 45°$ et ABC est isocèle rectangle en A. On a

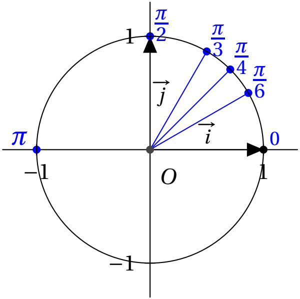
$$AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\cos(45) = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin(45) = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cosinus, sinus, valeurs remarquables

Angle en degré	0	30	45	60	90	180
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	-1
Sinus	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	0



Cosinus, sinus, à partir des valeurs remarquées, exemple

On souhaite connaitre le cosinus et le sinus de l'angle $\dfrac{261\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique.

Un tour est 2π soit $\dfrac{8\pi}{4}$.

On souhaite trouver k dans $\mathbb{Z}$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & -\pi < \dfrac{261\pi}{4} - k.tours \leqslant \pi & \\
\iff & -\pi < \dfrac{261\pi}{4} - k \times \dfrac{8\pi}{4} \leqslant \pi & \\
\iff & -4 < 261 - 8k \leqslant 4 & \times \dfrac{4}{\pi} \\
\iff & -265 < -8k \leqslant -257 & -261 \\
\iff & \dfrac{265}{8} > k \geqslant \dfrac{257}{8} & \div(-8) \\
\iff & 33,125 > k \geqslant 32,125 & \div(-8)
\end{array}
$$

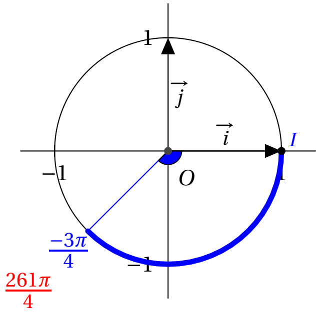
On trouve $k = 33$, Ainsi l'angle équivaut à $\dfrac{261\pi}{4} - 33 \times \dfrac{8\pi}{4} = \dfrac{-3\pi}{4}$.

Placement d'un angle sur le cercle trigonométrique à partir des valeurs remarquées, exemple

On note alors $\frac{261\pi}{4} \equiv \frac{-3\pi}{4}\ (2\pi)$:

$$\cos\left(\frac{261\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-3\pi}{4} + 33 \times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{261\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{-3\pi}{4} + 33 \times 2\pi\right) = \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$$

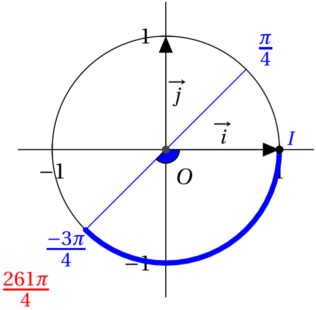


Placement d'un angle sur le cercle trigonométrique à partir des valeurs remarquées, exemple

On note alors $\frac{261\pi}{4} \equiv \frac{-3\pi}{4} \ (2\pi)$:

$$\cos\left(\frac{261\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{-3\pi}{4}+\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{261\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{-3\pi}{4}+\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



FIN