Trigonométrie et fonctions trigonométriques

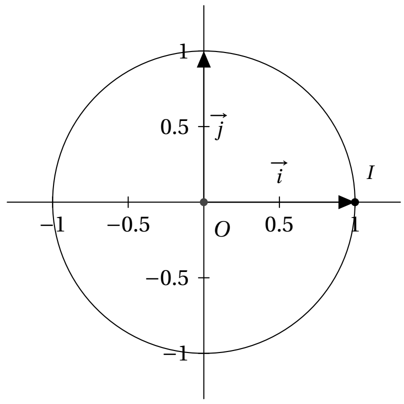
Table des Matières

☙✿ Trigonométrie et fonctions trigonométriques ✿❧

I. Cercle trigonométrique

Définition

Soit un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre O et de rayon 1. Le point I de coordonnées $(0\,;\,1)$ est appelé origine du cercle.
Le sens trigonométrique (sens positif) du cercle est le sens contraire de celui de la rotation des aiguilles d'une montre.



II. Mesure radian

☞**Activité 1**

Soit un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ et le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

1. Calculer le périmètre exacte du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
2. Placer le point A tel que $\widehat{IOA} = 135°$ dans le sens trigonométrique. Déterminer le longueur de l'arc de cercle IA.
   On note cette mesure $\left(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OA}\right)$.
3. Placer le point B tel que $\widehat{IOB} = 210°$ dans le sens trigonométrique. Déterminer le longueur de l'arc de cercle IB. On note cette mesure $\left(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)$.
4. Placer le point C tel que $\widehat{IOC} = 120°$ dans le sens trigonométrique négatif (sens contraire). Déterminer le longueur de l'arc de cercle IC.
   On note cette mesure $\left(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OC}\right)$.

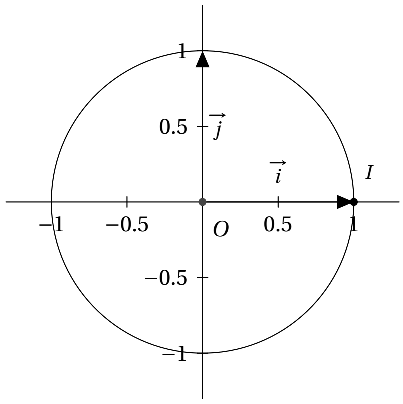
Définition

On appelle mesure en radian d'un angle α dans le sens trigonométrique, la longueur de l'arc de cercle trigonométrique associé, dans le sens trigonométrique contraire , l'opposé de la mesure de l'arc associé.
Cette mesure s'exprime en fonction du nombre π.
Pour un point quelconque du cercle trigonométrique, soit un angle α donné, il existe une unique mesure de cet angle, exprimée en radian, dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. cette mesure est appelée mesure principale de l'angle α.

☞**Exercice 1**

Déterminer la mesure principale des angles suivants et placer les points sur le cercle trigonométrique ci-contre :

1. $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{7\pi}{5}$,
2. $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) = -\dfrac{17\pi}{10}$
3. $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{103\pi}{2}$
4. $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OD}\right) = -\dfrac{15\pi}{4}$



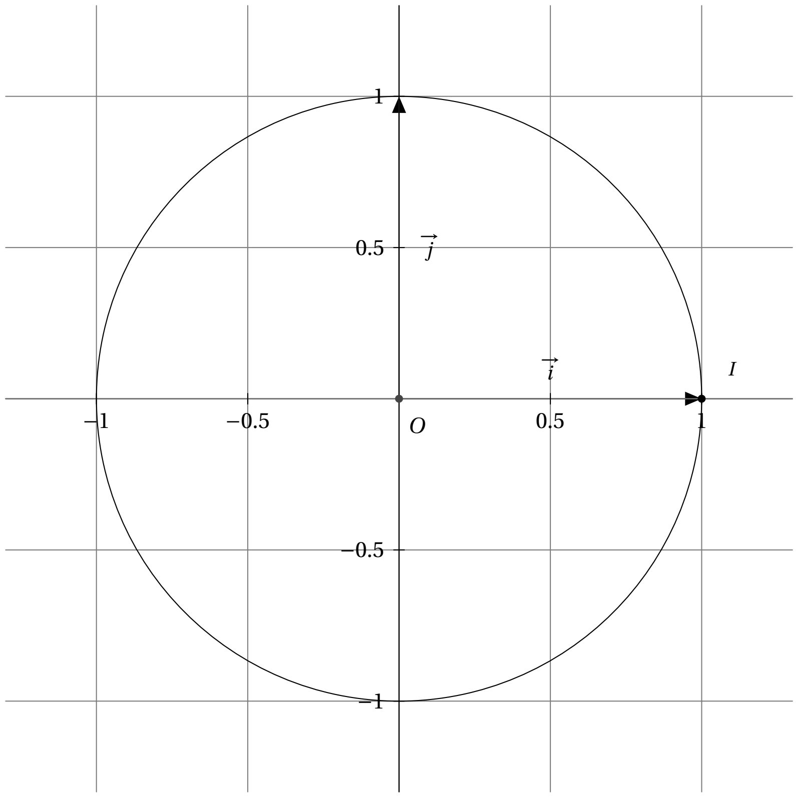
☞**Exercice 2**

Les mesures suivantes sont à connaître :

Le tableau de proportionnalité suivant permet de faire une correspondance en degré et radian :

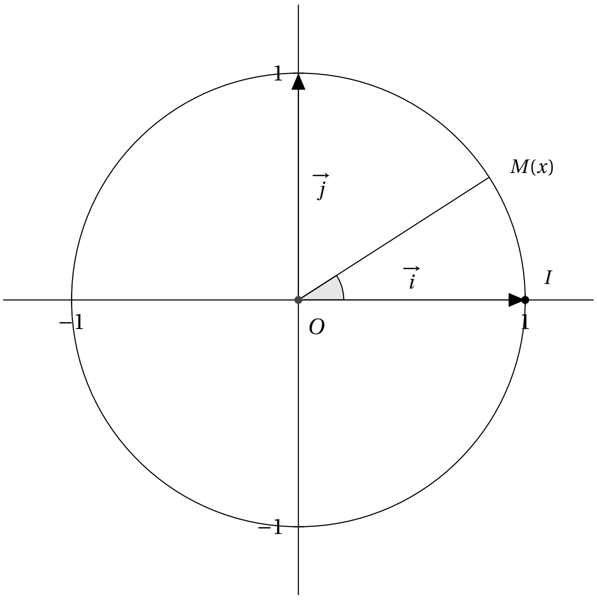
Angle en degré	0		45			120		150	180	360
Angle en radian		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$			2π

Placer ces mesures en radian sur le cercle trigonométrique (repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ d'unité 4 cm) ; puis leur opposés.



☞**Exercice 3**

Sur le cercle trigonométrique on a placé le point M du cercle trigonométrique de mesure x radian $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = x$.



1. Dans quel intervalle se situe le nombre x :

   a) $\left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$ b) $\left]\frac{-\pi}{2}\ ;\ 0\right[$ c) $\left]-\pi\ ;\ \frac{-\pi}{2}\right[$ d) $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$

2. Placer les points qui correspondent aux angles suivants :

   (a) $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right) = x + \pi$

   (b) $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right) = -x$

   (c) $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_3}\right) = -x + \pi$

III. cosinus et sinus

III. A. Définitions

☞**Activité 2**

Soit un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ et le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, l'unité est 2 cm.

1. (a) Placer le point M d'ordonnée $0,5$ sur le cercle trigonométrique.
   (b) Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$.
   (c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$.
2. (a) Placer le point M' d'abscisse $0,5$ sur le cercle trigonométrique.
   (b) Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right)$.
   (c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right)$.
3. (a) Placer le point N sur le cercle trigonométrique dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales .
   (b) Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right)$.
   (c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right)$.

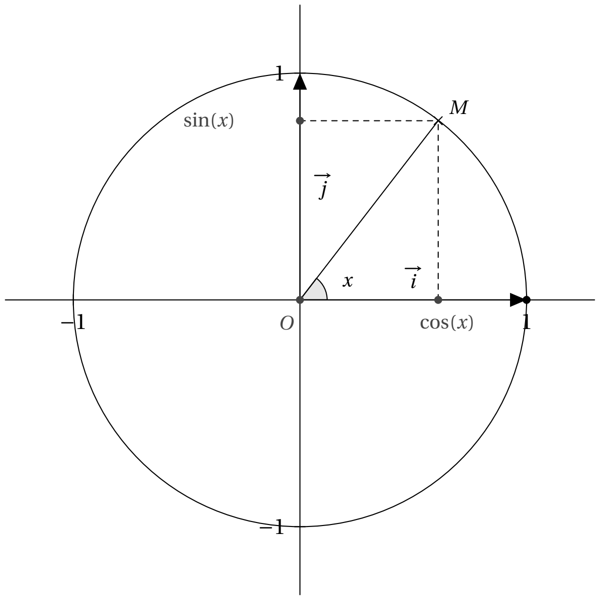
Définition

Soit le cercle trigonométrique et un angle x, exprimé en radian, repéré sur le cercle et associé au point M. On appelle cosinus de l'angle x, noté $\cos(x)$, l'abscisse du point M et sinus de l'angle, noté, $\sin(x)$, l'ordonnée du point M.

Ainsi on a :

$$\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = x$$

$$M(\cos(x)\ ;\ \sin(x))$$



III. B. cosinus et sinus des angles remarquables

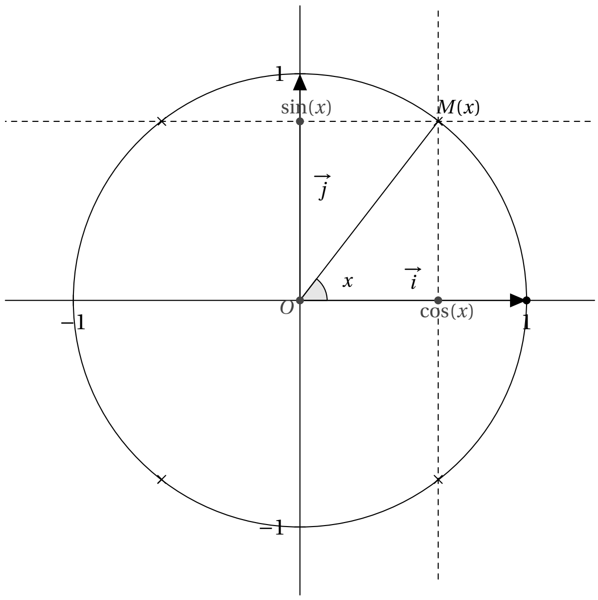
Angle x en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

III. C. Formules du cosinus et sinus

Propriétés

Soit x un nombre réel quelconque.

1. $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
2. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (Pythagore)
3. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$,
4. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$,
5. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$,
6. $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,
7. $\cos(-x) = \cos(x)$,
8. $\sin(-x) = -\sin(x)$,
9. $\cos(-x + \pi) = -\cos(x)$,
10. $\sin(-x + \pi) = \sin(x)$.



☞**Exercice 4**

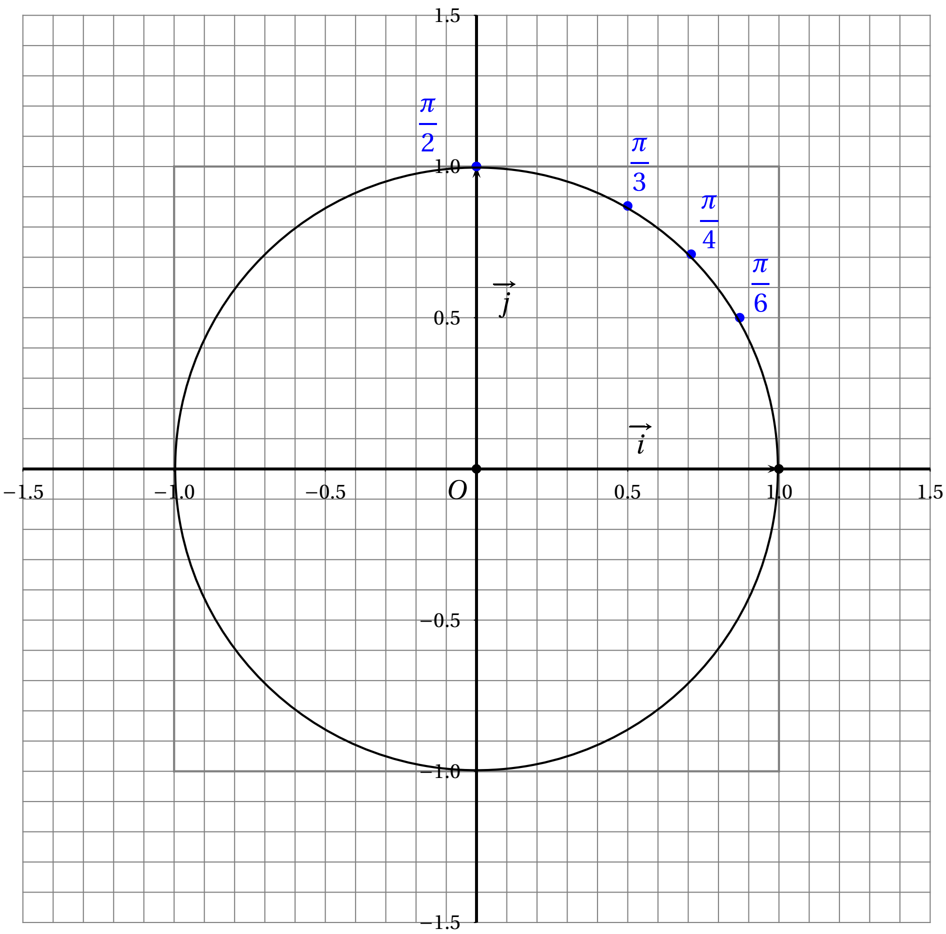
À partir du tableau des valeurs remarquables et des formules précédentes, retrouver les valeurs suivantes (aussi remarquables), vous placerez les valeurs d'angle x sur le cercle trigonométrique comme celles indiquées, correspondant au point M tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right) = x$:

1) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ 3) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

4) $\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ 5) $\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ 6) $\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

7) $\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ 8) $\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ 9) $\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

10) $\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ 11) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ 12) $\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{31\pi}{3}\right)$



☞**Exercice 5**

Soit un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.
Pour tout réel x de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, déterminer le signe de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

IV. Fonctions périodiques

Définition

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, T est un nombre réel.
La fonction f est périodique de période T si pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

V. Fonctions sinus et cosinus

V. A. Définitions

Définition

Soit un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ et le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
Avec les notations précédentes, on définit deux fonctions sur $\mathbb{R}$:

- la fonction cosinus :
$$\begin{array}{rccl} \cos : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = \cos(x) \end{array}$$
- la fonction sinus :
$$\begin{array}{rccl} \sin : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = \sin(x) \end{array}$$

Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(x+2\pi) =$ .... donc la fonction cos est ....
- $\sin(x+2\pi) =$ .... donc la fonction sin est ....

Ainsi on peut restreindre l'intervalle d'étude $\mathbb{R}$ des fonctions cos et sin à $]-\pi\,;\,\pi]$.

- $\cos(-x) =$ .... donc la fonction cos est..
- $\sin(-x) =$ .... donc la fonction sin est ....

Ainsi on peut restreindre l'intervalle d'étude $[-\pi\,;\,\pi]$ des fonctions cos et sin à $[0\,;\,\pi]$.

V. B. Dérivabilité

Théorème

(admis)
Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

- $\cos'(x) = -\sin(x)$,
- $\sin'(x) = \cos(x)$.

V. C. Variations de signe des fonctions sinus et cosinus

Le signe du cosinus et du sinus se lisent sur le cercle trigonométrique, les variations des fonctions associées s'en déduisent.
Compléter les tableaux de variations et signes suivants :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe $\cos(x)$			
Variations sin			

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe $-\sin(x)$			
Variations cos			

Par parité on en déduit les variations sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ (on obtient ainsi les variations d'une période).

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations sin					

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations cos					

V. D. Représentation graphique des fonction trigonométriques

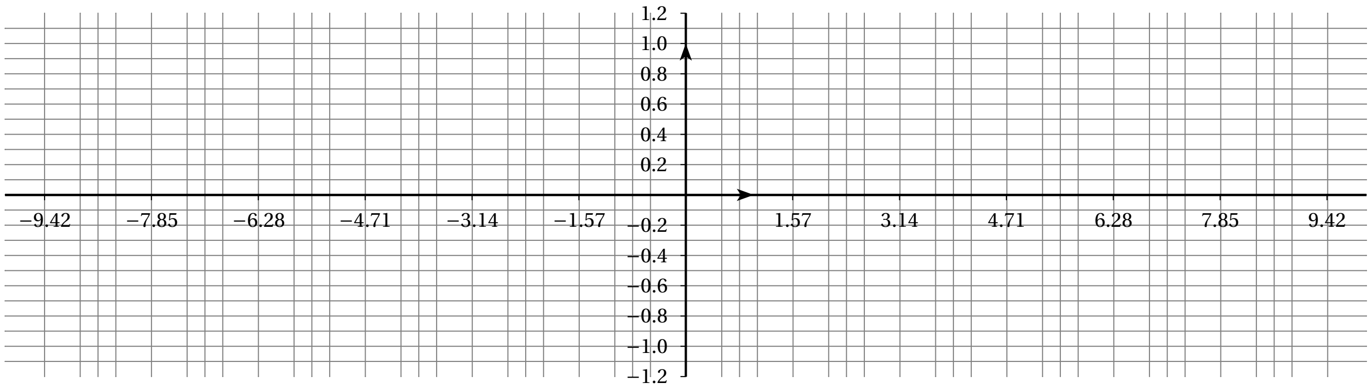
Soient un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

On note $\mathscr{C}_{\cos}$ la courbe du cosinus d'équation $y = \cos(x)$ et $\mathscr{C}_{\sin}$ la courbe du cosinus d'équation $y = \sin(x)$.

Le tableau de valeurs remarquables sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ permet de trouver les premiers points de la courbe $\mathscr{C}_{\cos}$ et de la courbe $\mathscr{C}_{\sin}$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$	$0,5$	0	$-0,5$	$\frac{-\sqrt{2}}{2} \simeq -0,71$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq -0,87$	-1
$\sin(x)$	0	$0,5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$	$0,5$	0

En utilisant la symétrie et la périodicité (ici on a trois périodes), tracer les courbes $\mathscr{C}_{\cos}$ et $\mathscr{C}_{\sin}$ sur le graphique suivant :



VI. Dérivabilité des fonctions composées

Théorème

(admis)

Soit une fonction u dérivable sur I, les fonctions $\cos(u)$ et $\sin(u)$ sont dérivables sur I et on a :

- $[\cos(u)]' = -u' \sin(u)$
- $[\sin(u)]' = u' \cos(u)$

En particulier si u est une fonction affine d'expression $u(x) = mx + p$ avec m et p réels :

- $[\cos(mx+p)]' = -m\sin(mx+p)$
- $[\sin(mx+p)]' = m\cos(mx+p)$

☞**Exercice 6**

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

2. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin(\pi - 3x)$.

VII. Exercice : la fonction tangente

☞**Exercice 7**

Soit la fonction tan définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on note $\mathscr{C}_{tan}$ la courbe de la fonction tan dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1. Monter que pour tout nombre x de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(-x) = -\tan(x)$ et $\tan(x + \pi) = \tan(x)$. Quelle est la période de la fonction tan ?

2. Justifier que tan est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et
$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$,
en déduire le tableau de variations de tan sur $\left]\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

3. Déterminer l'équation de la tangente en 0 à $\mathscr{C}_{\tan}$.

4. Donner le tableau de valeurs remarquables de $\tan(x)$.

5. Compléter le graphique suivant par la représentation de la fonction tan :