Exemples de deux suites : arithmétiques et géométriques

Table des Matières

Exemples de deux suites : arithmétiques et géométriques

I. Suite arithmétiques

I. A. Définition

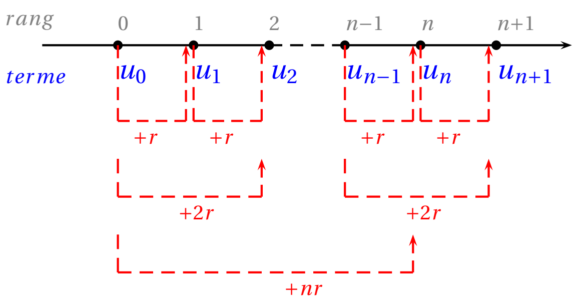
Activité 1

Soit (u_n) une suite définie par un premier terme u_0 réel. r est un nombre réel.
Montrer l'équivalence par une double implication suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 + nr \Longleftrightarrow u_{n+1} = u_n + r$$

indication : pour une des implications ou pourra exprimer la somme $u_i - u_{i-1}$
(c'est à dire $\sum_{i=1}^{n}(u_i - u_{i-1}) = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + ... + (u_n - u_{n-1})$) de deux manières différentes.

Schéma :



Définition

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel u_0 et une des deux relations équivalentes :

- $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 + nr$ *(relation fonctionnelle)*
- $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$ *(relation de récurrence)*

La suite (u_n) est dite arithmétique, r est appelé raison de la suite.

Remarque

En comprenant le schéma précédent, on remarque aisément les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r = u_2 + (n-2)r...$$

. D'une manière général, pour tout nombre entier naturel i,

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_i + (n-i)r.$$

.

Exercice 1

Soit une suite arithmétique (u_n) définie par $u_5 = 240$ et sa raison -2. Déterminer le rang n à partir duquel $u_n < 0$.

☞**Exercice 2**

Chaque mois, le capital C_n d'un client augmente de 5% du capital initial C_0 qui s'élève à 10 000 €(***taux d'intérêt simple***).
Au bout de combien de mois le capital C_n aura-t-il doublé ?

I. B. Exemples de représentation graphique

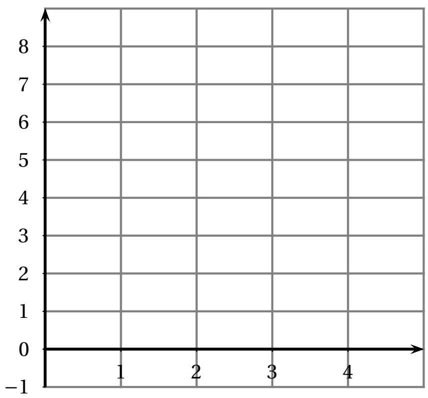
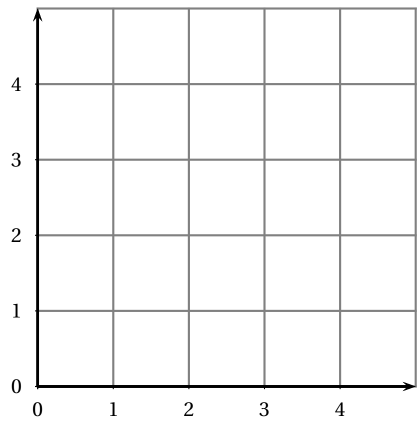
☞**Activité 2**

Soit les suites (u_n) est (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

u	v
$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 0,5 \\ v_0 = 4 \end{cases}$

Pour chacune des suites répondre aux questions suivantes en complétant le tableau ci-dessous :

1. Donner les relations fonctionnelles des deux suites, soit les expressions de u_n et v_n en fonction de n (voir schéma et définition).
2. Compléter la représentation graphique des points des deux suites.
3. Conjecturer les variations (et la limite, soit la tendance lorsque n est assez grand) de chacune des suites.
4. Dans les deux cas, les points de la suite sont alignés sur une droite, dans chacun des cas donner l'équation de la droite, ne pas la tracer.

relation fonctionnelle	$u_n =$	$v_n =$
exemples	$r > 0$ $r = 2$	$r < 0$ $r = -0,5$
		
variations		
limites	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$
équation de droite		

I. C. variations

✒ Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r réelle.

- si $r < 0$ la suite u est strictement décroissante,
- si $r = 0$ la suite u est constante,
- si $r > 0$ la suite u est strictement croissante.

☞Démonstration 1

laissée en exercice.

I. D. limites hors programme, pour information

✒ Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r réelle.

- si $r < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- si $r > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

II. Suites géométriques

II. A. Définition

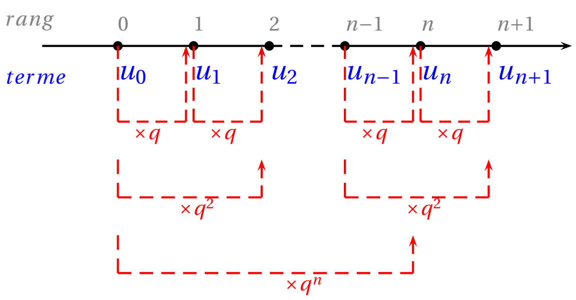
☞Activité 3

Soit (u_n) une suite définie par un premier terme u_0 réel non nul.
Montrer l'équivalence par une double implication suivante :
Soit q une nombre réel non nul donné :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 \times q^n \Longleftrightarrow u_{n+1} = u_n \times q$$

indication : pour une des implications ou pourra exprimer le produit $\prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i-1}} = \dfrac{u_1}{u_0} \times \dfrac{u_2}{u_1} \times \ldots \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ de deux manières différentes, en justifiant que les termes de la suite (u_n) ne sont pas nuls.

Schéma :



✒ **Définition**

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel u_0 et une des deux relations équivalentes :

- $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 \times q^n$ *(relation fonctionnelle)*
- $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n \times q$ *(relation de récurrence)*

la suite (u_n) est dite géométrique, q est appelé raison de la suite.

✒ **Remarque**

En comprenant le schéma précédent, on remarque aisément les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 q^n = u_1 q^{n-1} = u_2 q^{n-2} \ldots$$

D'une manière général, pour tout nombre entier naturel i,

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_i q^{n-i}$$

☞**Exercice 3**

Soit une suite (u_n) géométrique définie par $u_2 = 24$ et sa raison $\frac{1}{2}$. Déterminer $\sum_{i=0}^{5} u_i$ soit $u_0 + u_1 + \ldots + u_5$.

☞**Exercice 4**

Chaque mois, le capital C_n d'un client augmente **successivement** de 2% (***taux d'intérêt composé***).
Au 1er janvier 2018 le capital de départ C_0 était de 50 €.
À quelle date le capital C_n aura-t-il dépassé pour la première fois le double de C_0 ?

II. B. Exemples de représentation graphique

☞**Activité 4**

Soit les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (z_n) définies par :

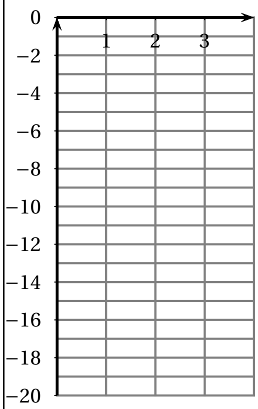
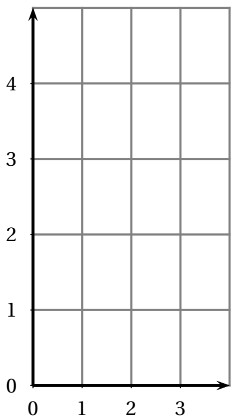
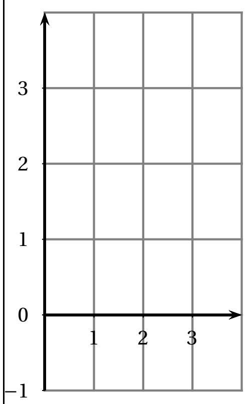
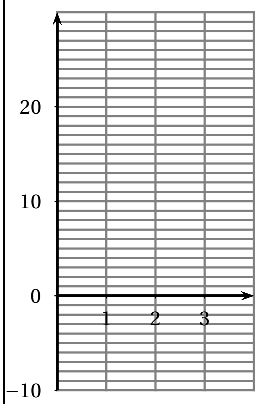
u	v	w	z
$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = 0,5v_n \\ v_0 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} w_{n+1} = -0,25v_n \\ v_0 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} z_{n+1} = -3z_n \\ v_0 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Pour chacune des suites répondre aux questions suivantes en complétant le tableau ci-dessous :

1. Donner les relations fonctionnelles des quatre suites, soit les expressions de u_n, v_n, w_n et z_n en fonction de n (voir schéma et définition).

2. Compléter la représentation graphique des points des quatre suites.

3. Conjecturer les variations (et la limite) de chacune des suites.

relation fonctionnelle	$u_n =$	$v_n =$	$w_n =$	$z_n =$
exemples	$q > 1$ $q = 2$	$0 < q < 1$ $q = 0,5$	$-1 < q < 0$ $q = -0,25$	$q < -1$ $q = -3$
				
variations				
limites	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n =$

II. C. variations

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, $q \neq 0$ et de premier terme u_0 tel que $u_0 > 0$ (dans le cas où $u_0 < 0$ les résultats se déduisent de ce qui suit).

- si $0 < q < 1$ la suite u est décroissante
- si $q = 1$ la suite u est constante
- si $q > 1$ la suite u est croissante
- si $q < 0$ la suite u est ni croissante ni décroissante.

☞**Démonstration 2**

laissée en exercice.

II. D. limites hors programme, pour information

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, $q \neq 0$ et de premier terme u_0 tel que $u_0 > 0$ (dans le cas où $u_0 < 0$ les résultats se déduisent de ce qui suit).

- si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- si $q < -1$, u_n n'a pas de limite, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = +\infty$.

III. Sommes des termes

Soit une suite (u_n).
On note S_n la somme $\sum\limits_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n$.

III. A. Suites arithmétiques

☞**Activité 5**

Carl Friedrich Gauss (Allemeand 1 777 - 1 855), alors âgé de huit ans répond aisément à un exercice donné par son professeur :

Calculer la somme : $1+2+3+4+...+100$

En effet il remarque que cette somme peut-être calculée en organisant le calcul par une double somme (somme en ligne et en colonne terme à terme) :

1	+	2	+	3	+	...	+	98	+	99	+	100
100	+	99	+	98	+	...	+	3	+	2	+	1

Retrouver le résultat trouvé par Carl Friedrich Gauss.
Seriez-vous calculer $1+2+3+...+1000$?

Propriété

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0.
$S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

$$S_n = (n+1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}$$

on pourra retenir :

$$S_n = \textit{nombre de termes} \times \frac{\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}}{2}$$

Ainsi (par exemple)

$$S_n = (n)\,\frac{u_1 + u_n}{2}$$

☞**Démonstration 3**

La démonstration est le cas général illustré par Carl Friedrich Gauss à son jeune âge.

1. Soit un entier n donné. Montrer que pour tout i entier compris entre 0 et n,
   $u_i + u_{n-i} = u_0 + u_n$
2. En déduire $2 \times S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$: on utilisera le principe de Carl Friedrich Gauss :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} u_0 & + & u_1 & + & u_2 & + & \dots & + & u_{n-2} & + & u_{n-1} & + & u_n \\ u_n & + & u_{n-1} & + & u_{n-2} & + & \dots & + & u_2 & + & u_1 & + & u_0 \end{array}$$

3. Conclure.

☞**Exercice 5**

u est arithmétique, telle que $u_2 = 4$ et $u_5 = -5$. Calculer $\sum\limits_{i=0}^{5} u_i$

III. B. Suites géométriques

Propriété

Soit une suite (u_n) géométrique de raison q et de premier terme u_0.
$S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

$$S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On pourra retenir,

$$S_n = \textit{premier terme} \times \frac{1-\textit{raison}^{\textit{nombre de termes}}}{1-\textit{raison}}$$

Ainsi (par exemple),

$$S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

☞**Démonstration 4**

1. Si $q = 1$ donner $\sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.
   On suppose $q \neq 1$.
2. Justifier que $\sum\limits_{i=0}^{n} u_i = u_0 \sum\limits_{i=0}^{n} q^i$.
3. Montrer que pour tout entier n, $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i - q \sum\limits_{i=0}^{n} q^i = 1 - q^{n+1}$
4. En déduire $\sum\limits_{i=0}^{n} u_i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

☞**Exercice 6**

légende : Le jeu d'échecs comporte 64 cases. Pour récompenser son inventeur Sissa, L'empereur d'Inde Shiram accepta (ironiquement) la proposition faite par l'inventeur :
"Sur la première case du jeu vous placerez un grain de riz, sur la 2^e case deux grains de riz, sur la 3^e case 2^3 grains de riz, sur la i^e case 2^i grains de riz jusqu'à la 64^e case du jeu."
Si vous aviez été conseiller de l'empereur à cette époque auriez-vous laissé faire le marché ?