Suites, généralités

Table des Matières

Suites, généralités

I. Introduction et définition

Activité 1

Léonardo Pisano dit Léonardo Fibonacci (1 170 - 1 240 italien) écrit l'un des premiers traités rigoureux du Moyen-âge *Liber abaci* (1 202).
il introduit les chiffres indo-arabes, du zéro et la notation positionnelle du système décimal.

Fibonacci utilisait le symbole racine carrée $\surd$ pour les radicaux.

On lui doit le fameux problème suivant :
Combien de couples de lapins obtiendrions-nous à la fin de l'année si, commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ?
Répondre au problème de Fibonacci.

La formalisation du problème sera présentée par Édouard Lucas (1 842-1 891)

Définition

Une suite u est une fonction définie dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$:

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

- Le terme $u(n)$, image de n par u, est le plus souvent noté u_n.
- La suite u peut être notée (u_n) ou $(u(n))$

Remarque

On est souvent amené dans l'étude de suite de décrire les termes consécutifs à ceux du rang n soit ceux du rang $n+1$ ou $n+2$...
Ainsi le terme qui suit u_n est u_{n+1}, celui qui précède u_n pour n non nul, est u_{n-1}.
Schéma :

rang	0	1	2	…	$n-1$	n	$n+1$
terme	u_0	u_1	u_2	…	u_{n-1}	u_n	u_{n+1}

Définition

Une suite (u_n) est définie par **récurrence** (simple) s'il exite une fonction f telle que pour tout entier naturel n du domaine de définition de la suite (u_n), $u_{n+1} = f(u_n)$.
La fonction f peut dépendre de l'entier naturel n.

☞**Exercice 1**

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_{n+1} = (n+1)u_n$ avec $u_1 = 1$ (ici pour tout réel x, $f(x) = (n+1)x$) et la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$. (on note $v_n = n!$)

1. Vérifier par des calculs que $u_2 = 2$ et $u_3 = 6$ puis que $v_2 = 2$ et $v_3 = 6$.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

n	1	2	3	4	5
u_n	2	6			
v_n	2	6			

3. Quelle conjecture peut-on émettre ?

II. Variations d'une suite

Propriété

Soit une suite (u_n).

- u est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$
- u est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$
- u est constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$

Remarque

Pour étudier la comparaison des termes u_n et u_{n+1} on est souvent amené à étudier :

- le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
- la comparaison à 1 du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (avec $u_n \neq 0$ et u_{n+1} et u_n de même signe)

☞**Exercice 2**

Étudier les variations des suites (u_n), (u_n) et (u_n), définies par :

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - 2$
2. Pour tout entier naturel n, $v_n = 0,5^n$.
3. Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = n + w_n$ avec $w_0 = -2$.

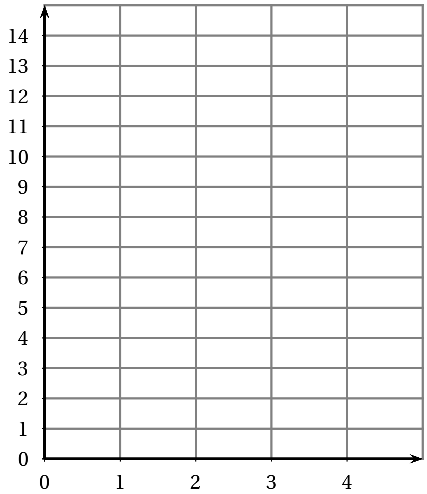
III. Représentation graphique

Par définition des suites (et des fonctions), une suite (u_n) est représentée par l'ensemble des points M de coordonnées (n, u_n).

Exercice 3

Dans le repère suivant, représenter la suite (u_n) définie par :

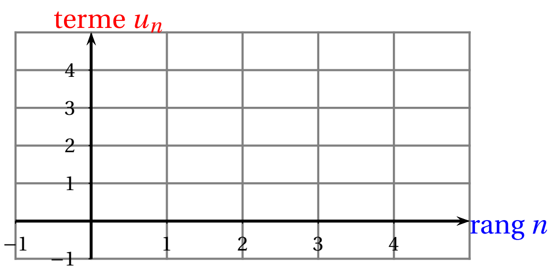
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$



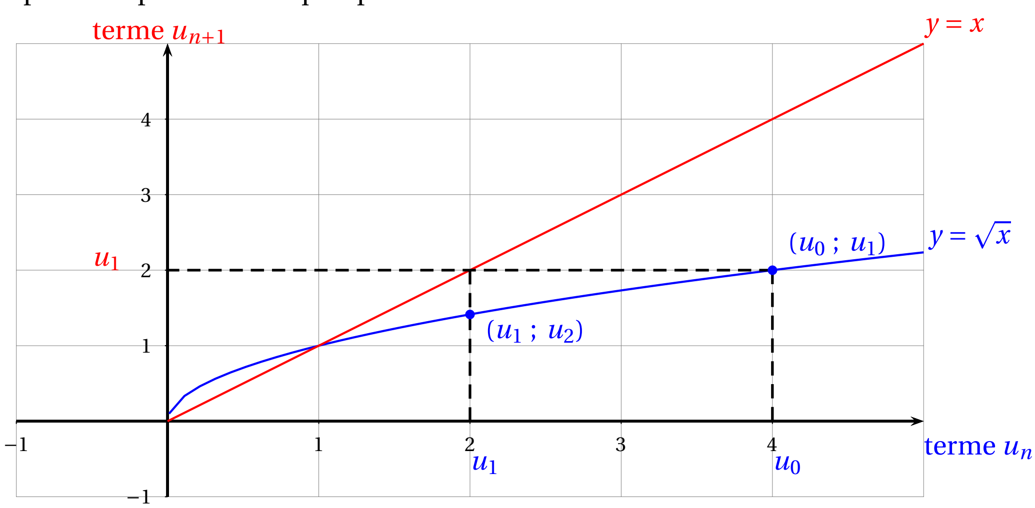
Exercice 4

Soit le suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = 4$, on pose f la fonction racine carrée.

1. Calculer tous les termes de la suite jusqu'au rang 5 inclus, vous donnerez des valeurs approchées à 0,001 des termes.
2. Représenter les premiers points précédent de la suite dont les coordonnées sont $(n\ ;\ u_n)$ dans le repère suivant :



3. Autre représentation graphique de la suite (u_n) : Sur le graphique suivant on a commencé à représenter les points de coordonnées $(u_n\ ;\ u_{n+1})$ en s'aidant de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe représentative de f déjà construites dans le repère ci-dessous. Continuer la représentation par la construction des premiers points remarqués précédemment.

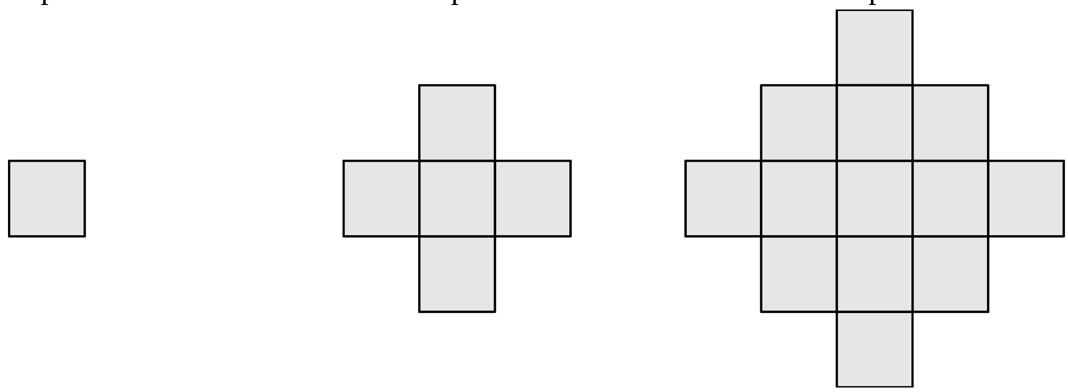


4. Conjecturer les variations de la suite (u_n).

IV. Somme des termes d'une suite

Activité 2

Le motif suivant constitué de carré, il est présenté au trois premières étapes de sa construction :



1. Quel sera le nombre carrés dans le motif de l'étape 5 ?
2. combien de carrés seraient dessinés entre les étapes 0 et 5 comprises.

Définition

Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. On appelle somme des termes de la suite (u_n), la suite (S_n) définie par

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

On note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Remarque

La somme des termes d'une suite se fait à partir de son intervalle de définition, par exemple, si u_0 n'est pas définit, la somme commence par u_1.

Exercice 5

Pour tout entier naturel n, n non nul, $u_n = \dfrac{1}{n}$, (S_n) est sa somme des termes.

Calculer la somme $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \sum_{k=1}^{5} u_k$.

Exercice 6

✧✧

Soit (u_n) une suite et (S_n) est sa somme des termes.

1. Démontrer que si le suite (u_n) est strictement positive alors la suite de la somme S_n est strictement croissante.
2. Qu'en est-il de la réciproque ? Préciser.
3. Que peut-on dire de la suite de la somme S_n si le suite (u_n) est strictement négative ? Justifier.