Variations d'une suite

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Variations d'une suite, définition

Soit une suite (u_n) définie sur un ensemble $\mathbb{A}$ inclus dans $\mathbb{N}$.

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{A}, u_n < u_{n+1}$
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{A}, u_n > u_{n+1}$
- (u_n) est constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{A}, u_n = u_{n+1}$

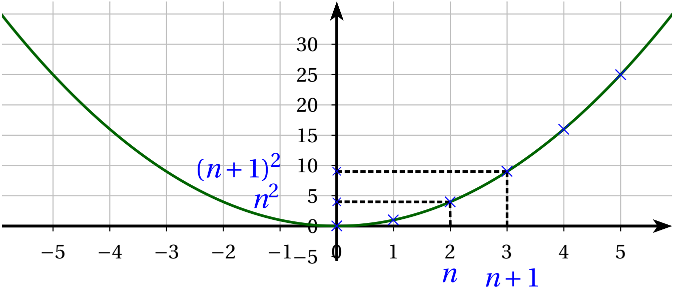
Méthodes d'études des variations d'une suite par le calcul :

- **comparaison de $u_{n+1} - u_n$ à 0.**
- **si u_n est de signe constant sur $\mathbb{A}$, comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.**

Variations d'une suite exemple

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n^2$.

- La fonction carré $(x \longmapsto x^2)$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
  $\mathbb{N} \subset [0\,;\,+\infty[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant n < n+1$, l'ordre est conservé par la fonction carré, on a $n^2 < (n+1)^2$ soit $u_n < u_{n+1}$.

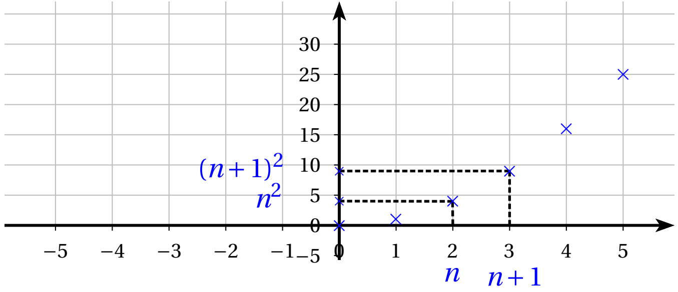


La suite (u_n) est croissante.

Variations d'une suite exemple

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n^2$.

- Soit n un entier naturel :
  $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
  n est un entier naturel donc $2n + 1 > 0$ soit $u_{n+1} - u_n > 0$ soit $u_{n+1} > u_n$.

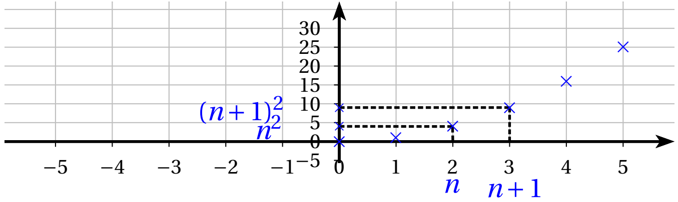


La suite (u_n) est croissante.

Variations d'une suite exemple

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n^2$.

- Soit n un entier naturel : $n^2 \geqslant 0$ et si n est non nul, $u_n > 0$.
  $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donc $u_0 < u_1$.
  Pour tout entier naturel non nul, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \dfrac{n^2+2n+1}{n^2}$.
  n est un entier naturel non nul, donc $2n+1 > 0$ et
  $n^2+2n+1 > n^2$ donc $\dfrac{n^2+2n+1}{n^2} > 1$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et $u_n > 0$
  donc $u_{n+1} > u_n$.
  Ainsi pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$



La suite (u_n) est croissante.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 0,75^n$.

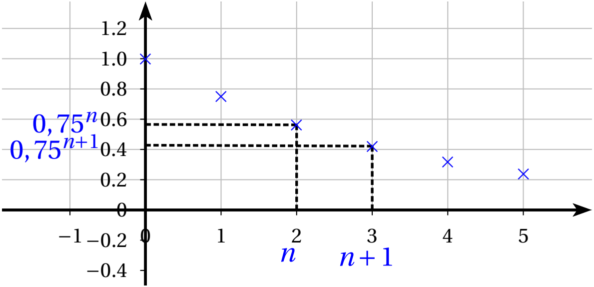
- Soit n un entier naturel :

  $u_{n+1} - u_n = 0,75^{n+1} - 0,75^n$

  $u_{n+1} - u_n = 0,75^n \times 0,75 - 0,75^n$

  $u_{n+1} - u_n = 0,75^n(0,75 - 1) = -0,25 \times 0,75^n$.

  $-0,25 < 0$ et $0,75^n > 0$ donc $-0,25 \times 0,75^n < 0$ soit $u_{n+1} - u_n < 0$ soit $u_{n+1} < u_n$.

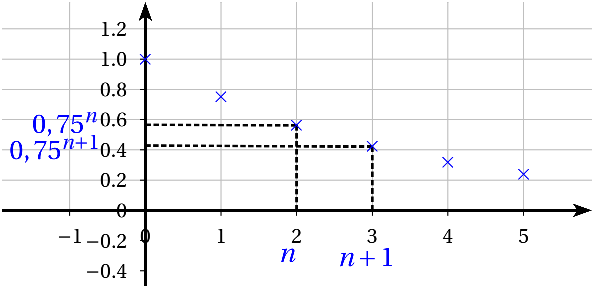


La suite (u_n) est décroissante.

Variations d'une suite exemple

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 0,75^n$.

- Soit n un entier naturel : $0,75^n > 0$
  $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0,75^{n+1}}{0,75^n} = \frac{0,75^n \times 0,75}{0,75^n} = 0,75.$$
  $$0,75 < 1 \text{ donc } \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1 \text{ et } v_n > 0 \text{ donc } v_{n+1} < v_n.$$



La suite (v_n) est décroissante.

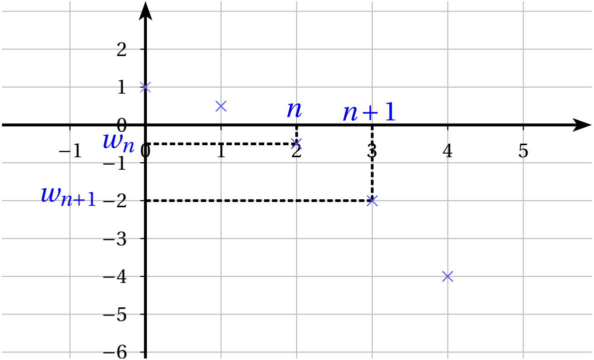
Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$w_{n+1} = w_n - 0,5(n+1)$ et $w_0 = 1$.

- Soit n un entier naturel :

  $w_{n+1} - w_n = -0,5(n+1)$.

  $n \in \mathbb{N}$ donc $-0,5(n+1) < 0$ donc $w_{n+1} - w_n < 0$ soit $w_{n+1} < w_n$.



La suite (w_n) est décroissante.

FIN