Suites géométriques
relations, représentation, variation

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Définition

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel non nul u_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = qu_n \textit{ (relation de récurrence) } ; q \in \mathbb{R}^*.$$

La suite (u_n) est dite géométrique, q est appelé raison de la suite.

Définition, exemple

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel $u_0 = 20$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = \frac{1}{2} u_n = 0,5 u_n \textit{ (relation de récurrence)}$$

La suite (u_n) est géométrique (par définition), $q = \dfrac{1}{2} = 0,5$ est la raison de la suite.

Calculs récurrents
$u_1 = \frac{u_0}{2} = \frac{20}{2} = 10$
$u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{10}{2} = 5$
$u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel $u_0 = 20$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = \frac{1}{2} u_n = 0,5 u_n \textit{ (relation de récurrence)}$$

La suite (u_n) est géométrique (par définition), $q = \frac{1}{2} = 0,5$ est la raison de la suite.

Calculs récurrents	Calculs à partir du premier terme u_0
$u_1 = \frac{u_0}{2} = \frac{20}{2} = 10$	$u_1 = 0,5 u_0$
$u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{10}{2} = 5$	$u_2 = 0,5 u_1 = 0,5 \times 0,5 u_0 = 0,5^2 \times u_0 = 5$
$u_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$	$u_3 = 0,5 u_2 = 0,5 \times 0,5^2 \times u_0 = 0,5^3 \times u_0 = 2,5$

Définition, exemple

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel $u_0 = 20$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = \frac{1}{2}u_n = 0,5u_n \text{ (relation de récurrence)}$$

La suite (u_n) est géométrique (par définition), $q = \frac{1}{2} = 0,5$ est la raison de la suite.

Calculs récurrents	Calculs à partir du premier terme u_0
$u_1 = 0,5u_0$ $u_2 = 0,5u_1$ $u_3 = 0,5u_2$	$u_1 = 0,5^1 \times u_0$ $u_2 = 0,5^2 \times u_0$ $u_3 = 0,5^3 \times u_0$
...	...
...	$u_n = 0,5^n \times u_0$
$u_{n+1} = 0,5u_n$	...

Propriété

Soit un réel non nul u_0 donné.
Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = qu_n$, q est un réel non nul,
on admet $u_n \neq 0$:

$$\begin{array}{rcl}
u_1 & = & qu_0 \\
u_2 & = & qu_1 \\
u_3 & = & qu_2 \\
 & \ldots & \\
u_{n+1} & = & qu_n \\
\hline
u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n \times u_{n+1} & = & qu_0 \times qu_1 \times qu_2 \times \ldots \times qu_n \\
u_{n+1} & = & q^{n+1} u_0 \\
u_{\color{red}{n}} & = & q^{\color{red}{n}} \times u_0
\end{array}$$

Propriété, réciproque

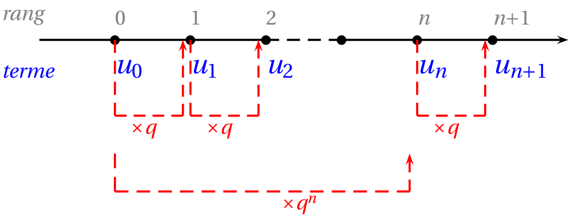
Soit a et b deux réels non nuls tels que pour tout entier naturel n :
$u_n = ab^n$
$u_0 = a.$
Soit n un entier naturel :
$u_{n+1} = ab^{n+1}$
$u_{n+1} = ab^n \times b$
$u_{n+1} = u_n \times b.$
La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $q = b.$
On a alors $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} = qu_n.$

Propriété

Soit u_0 un réel non nul et q un réel non nul.
Pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} u_{n+1} = qu_n & \Longleftrightarrow & u_n = u_0 \times q^n \\ \textit{relation de récurrence} & & \textit{relation fonctionnelle} \end{array}}$$

Schéma :

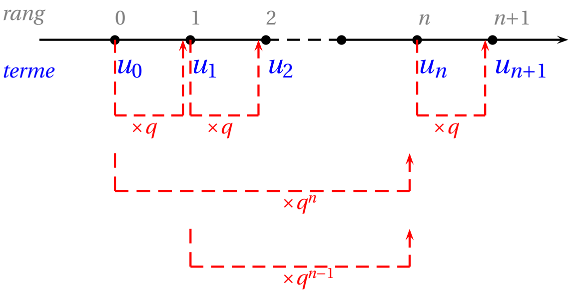


Propriété

Soit u_1 un réel non nul et q un réel non nul.
Pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} u_{n+1} = qu_n & \Longleftrightarrow & u_n = u_1 \times q^{n-1} \\ \textit{relation de récurrence} & & \textit{relation fonctionnelle} \end{array}}$$

Schéma :



Propriété

Soit u_i un réel non nul (i un entier naturel) et q un réel non nul.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à i :

$u_{n+1} = qu_n$	$\Longleftrightarrow$	$u_n = u_i \times q^{n-i}$
relation de récurrence		*relation fonctionnelle*

Propriété, exemple

$u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,5u_n$.

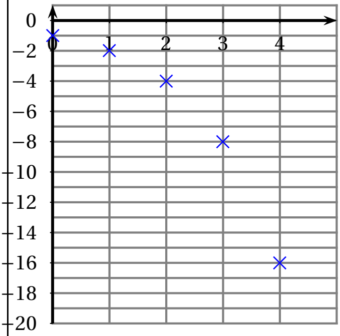
$$\boxed{\begin{array}{ccc} u_{n+1} = 0,5u_n & \iff & u_n = u_0 \times q^n = 20 \times 0,5^n \\ \textit{relation de récurrence} & & \textit{relation fonctionnelle} \end{array}}$$

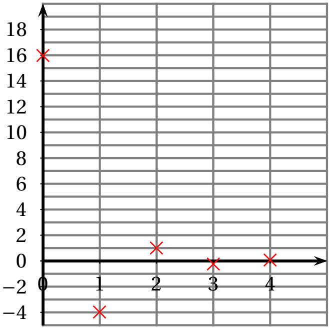
$u_1 = 10$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 0,5u_n$.

$$\boxed{\begin{array}{ccl} u_{n+1} = 0,5u_n & \iff & u_n = u_1 \times q^{n-1} = 10 \times 0,5^{n-1} \\ & & u_n = \dfrac{0,5}{0,5} \times 10 \times 0,5^{n-1} \\ & & u_n = \dfrac{10}{0,5} \times 0,5^n = 20 \times 0,5^n \\ \textit{relation de récurrence} & & \textit{relation fonctionnelle} \end{array}}$$

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = -0,25v_n \\ v_0 = 16 \end{cases}$
$u_n = -1 \times 2^n$	$v_n = 16 \times (-0,25)^n$





Signes

Soit une suite géométrique (u_n) de premier terme réel non nul u_0 et de raison q réel non nul : $u_{n+1} = qu_n$.

- Si $u_0 > 0$ et $q > 0$ alors pour tout entier naturel n : $u_n > 0$.
- Si $u_0 < 0$ et $q > 0$ alors pour tout entier naturel n : $u_n < 0$.
- Si $u_0 \neq 0$ et $q < 0$ alors pour tout entier naturel n : u_n n'est pas de signe constant.

Soit une suite géométrique (u_n) de premier terme réel non nul u_0 et de raison q réel non nul : $u_{n+1} = qu_n$.

Pour tout entier naturel n : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

- si $u_0 > 0$:
  - si $0 < q < 1$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ soit $u_{n+1} < u_n$:
    (u_n) est strictement décroissante.
  - si $q = 1$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ soit $u_{n+1} = u_n$:
    (u_n) est constante égale à u_0.
  - si $q > 1$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ soit $u_{n+1} > u_n$:
    (u_n) est strictement croissante.

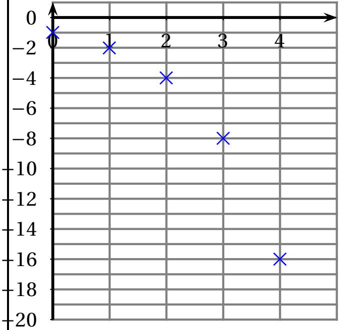
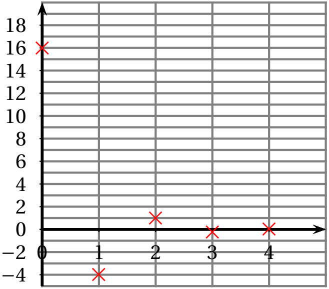
Soit une suite géométrique (u_n) de premier terme réel non nul u_0 et de raison q réel non nul : $u_{n+1} = qu_n$.

Pour tout entier naturel n : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

- si $u_0 < 0$:
  - si $0 < q < 1$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ soit $u_{n+1} > u_n$:
    (u_n) est strictement croissante.
  - si $q = 1$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ soit $u_{n+1} = u_n$:
    (u_n) est constante égale à u_0.
  - si $q > 1$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ soit $u_{n+1} < u_n$:
    (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

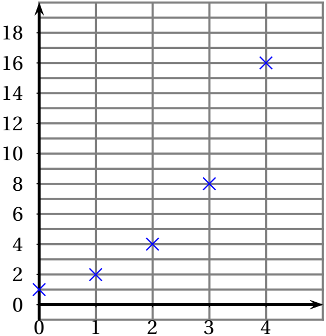
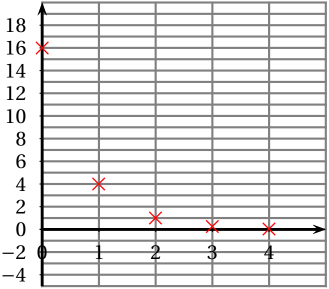
Variations, exemples

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

<table>
<tr><td>$n \in \mathbb{N}$</td><td>$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ u_0 = -1 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} v_{n+1} = -0,25v_n \\ v_0 = 16 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$n \in \mathbb{N}$</td><td>$u_n < 0$</td><td>v_n change de signe</td></tr>
<tr><td>$n \in \mathbb{N}$</td><td>$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$; $u_{n+1} < u_n$</td><td>$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = -0,25$</td></tr>
<tr><td></td><td>(v_n) est décroissante</td><td>(v_n) ni croissante, ni décroissante</td></tr>
</table>

Variations, exemples

Soient les suites (w_n) et (z_n) définies pour tout entier naturel n par :

$n \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} w_{n+1} = 2u_n \\ w_0 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} z_{n+1} = 0,25v_n \\ z_0 = 16 \end{cases}$
		
$n \in \mathbb{N}$	$w_n > 0$	$z_n > 0$
$n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 2 > 1$; $w_{n+1} > w_n$	$\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = 0,25 < 1$; $w_{n+1} < w_n$
	(w_n) est croissante	(z_n) est décroissante

FIN