Suites arithmétiques
relations, représentation, variation

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Définition

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel u_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r \textit{ (relation de récurrence)} \; ; r \in \mathbb{R}.$$

La suite (u_n) est dite arithmétique, r est appelé raison de la suite.

Définition, exemple

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + 3 \textit{ (relation de récurrence)}$$

La suite (u_n) est arithmétique (par définition), $r = 3$ est la raison de la suite.

Calculs récurrents
$u_1 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$
$u_2 = u_1 + 3 = 4 + 3 = 7$
$u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10$

Définition, exemple

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + 3 \textit{ (relation de récurrence)}$$

La suite (u_n) est arithmétique (par définition), $r = 3$ est la raison de la suite.

Calculs récurrents	Calculs à partir du premier terme u_0
$u_1 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$	$u_1 = u_0 + 3$
$u_2 = u_1 + 3 = 4 + 3 = 7$	$u_2 = u_1 + 3 = u_0 + 3 + 3 = u_0 + 2 \times 3 = 7$
$u_3 = u_2 + 3 = 7 + 3 = 10$	$u_3 = u_2 + 3 = u_0 + 2 \times 3 + 3 = u_0 + 3 \times 3 = 10$

Définition, exemple

Soit une suite (u_n) définie par une premier terme réel $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + 3 \text{ \textit{(relation de récurrence)}}$$

La suite (u_n) est arithmétique (par définition), $r = 3$ est la raison de la suite.

Calculs récurrents	Calculs à partir du premier terme u_0
$u_1 = u_0 + 3$ $u_2 = u_1 + 3$ $u_3 = u_2 + 3$	$u_1 = u_0 + 1 \times 3$ $u_2 = u_0 + 2 \times 3$ $u_3 = u_0 + 3 \times 3$
...	...
...	$u_n = u_0 + n \times 3$
$u_{n+1} = u_n + 3$	...
...	...

Propriété

Soit un réel u_0 donné.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$:

$$\begin{array}{rcl}
u_1 & = & u_0 + r \\
u_2 & = & u_1 + r \\
u_3 & = & u_2 + r \\
 & \ldots & \\
u_{n+1} & = & u_n + r \\
\hline
u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1} & = & u_0 + u_1 + r + u_2 + r + \ldots + u_n + r \\
u_{n+1} & = & u_0 + (n+1)r \\
u_{\color{red}{n}} & = & u_0 + {\color{red}{n}}r
\end{array}$$

Propriété, réciproque

Soit a et b deux réels tels que pour tout entier naturel n : $u_n = a + bn$

$u_0 = a$.

Soit n un entier naturel :

$u_{n+1} = a + b(n+1)$

$u_{n+1} = a + bn + b$

$u_{n+1} = u_n + b$.

La suite (u_n) est donc arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $r = b$.

On a alors $u_n = u_0 + nr$ et $u_{n+1} = u_n + r$.

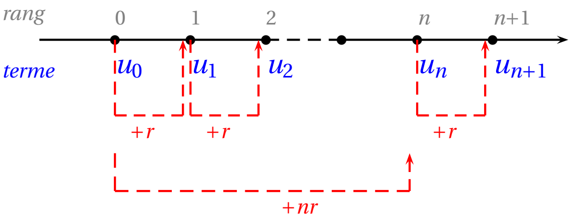
Propriété

Soit u_0 un réel et r un réel.

Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = u_n + r$	$\iff$	$u_n = u_0 + nr$
relation de récurrence		*relation fonctionnelle*

Schéma :

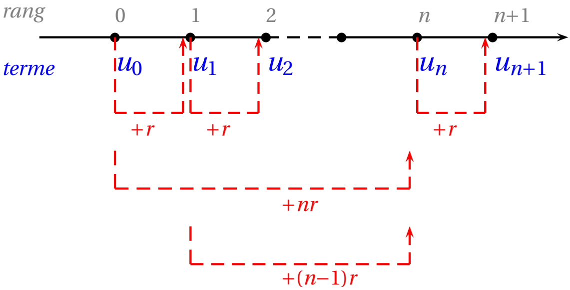


Propriété

Soit u_1 un réel et r un réel.
Pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} u_{n+1} = u_n + r & \iff & u_n = u_1 + (n-1)r \\ \textit{relation de récurrence} & & \textit{relation fonctionnelle} \end{array}}$$

Schéma :



Propriété

Soit u_i un réel (i un entier naturel) et r un réel.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à i :

$u_{n+1} = u_n + r$	$\Longleftrightarrow$	$u_n = u_i + (n-i)r$
relation de récurrence		*relation fonctionnelle*

Propriété, exemple

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3$.

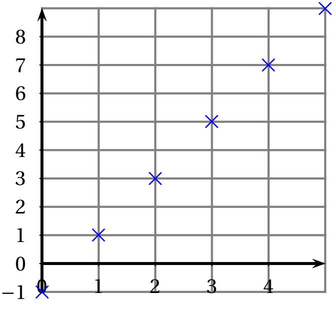
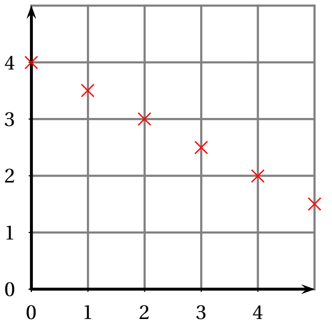
$u_{n+1} = u_n + 3$	$\Longleftrightarrow$	$u_n = u_0 + 3n = 1 + 3n$
relation de récurrence		*relation fonctionnelle*

$u_1 = 4$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = u_n + 3$.

$u_{n+1} = u_n + 3$	$\Longleftrightarrow$	$u_n = u_1 + (n-1) \times 3$
		$u_n = 4 + 3(n-1) = 1 + 3n$
relation de récurrence		*relation fonctionnelle*

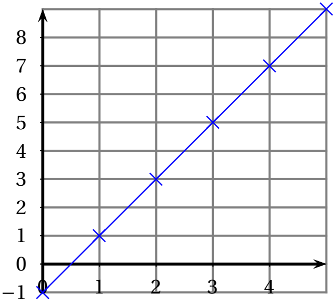
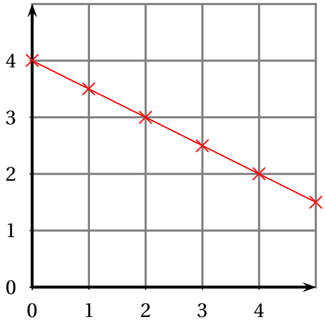
Représentation, exemples

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 0,5 \\ v_0 = 4 \end{cases}$
$u_n = -1 + 2n$	$v_n = 4 - 0,5n$
	

Représentation, exemples

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$n \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 0,5 \\ v_0 = 4 \end{cases}$
$n \in \mathbb{N}$	$u_n = -1 + 2n$	$v_n = 4 - 0,5n$
		
$x \in \mathbb{R}$	$y = -1 + 2x$	$y = 4 - 0,5x$
$x \in \mathbb{R}$	$f(x) = -1 + 2x$	$g(x) = 4 - 0,5x$

Variations

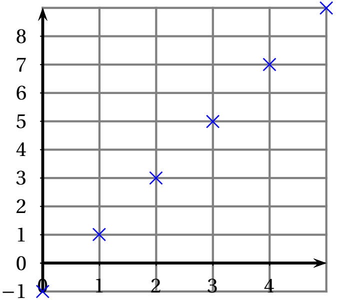
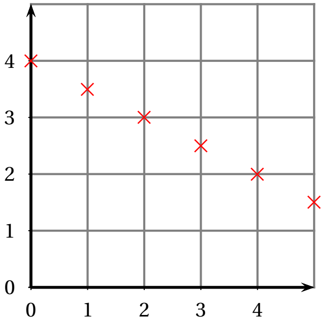
Soit une suite arithmétique (u_n) de premier terme réel u_0 et de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = r$.

- si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ soit $u_{n+1} < u_n$:
  (u_n) est strictement décroissante.
- si $r = 0$ alors $u_{n+1} - u_n = 0$ soit $u_{n+1} = u_n$:
  (u_n) est constante égale à u_0.
- si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ soit $u_{n+1} > u_n$:
  (u_n) est strictement croissante.

Variations, exemples

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$n \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 0,5 \\ v_0 = 4 \end{cases}$
		
$n \in \mathbb{N}$	$u_{n+1} - u_n = 2 > 0$; $u_{n+1} > u_n$	$v_{n+1} - v_n = -0,5 < 0$; $v_{n+1} < v_n$
	(u_n) est croissante	(v_n) est décroissante

FIN