Somme de termes d’une suite géométrique

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Sommes des termes d'une suite, notation

Soit une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n.

D'une manière générale, la suite (S_n) de la somme des termes de la suite (u_n) se note :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i.$$

Sommes des termes d'une suite géométrique, cas général

Soit une suite géométrique de premier terme réel non nul u_0 et de raison q réel non nul et différent de 1.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^n$$
$$S_n = u_0 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right)$$
$$qS_n = u_0 \left(q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}\right)$$
$$S_n - qS_n = u_0 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n - \left(q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}\right)\right)$$
$$S_n(1-q) = u_0 \left(1 - q^{n+1}\right)$$
$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

D'une manière générale on peut retenir :

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Sommes des termes d'une suite géométrique, cas général, exemple

Soit une suite géométrique de premier terme réel $u_0 = 20$ et de raison $0,5$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 20 \times 0,5^n$.
En particulier $u_5 = 20 \times 0,5^5 = 0,625$.

$S_5 = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_5$
$S_5 = 20 + 10 + 5 + 2,5 + 1,25 + 0,625 = 39{,}375$

$$S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = (\text{premier terme}) \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

$S_5 = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_5$
$S_5 = 20 \times \dfrac{1-0,5^6}{1-0,5} = 39{,}375$

Sommes des termes d'une suite géométrique, cas général, exemple

Soit une suite géométrique de premier terme réel $u_0 = 20$ et de raison $0,5$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 20 \times 0,5^n$.

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$S_n = 20 \times \dfrac{1 - 0,5^{n+1}}{1 - 0,5} = 40\left(1 - 0,5^{n+1}\right)$

Sommes des termes d’une suite géométrique, cas général

Soit une suite géométrique de premier terme réel non nul u_i et de raison q réel non nul différent de 1, i est un entier naturel.

Pour tout entier naturel n supérieur à i, $u_n = u_i \times q^{n-i}$

$$S'_n = u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \ldots + u_n = u_i + u_i \times q + u_i \times q^2 + \ldots + u_i \times q^{n-i}$$
$$S'_n = u_i\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-i}\right)$$
$$qS'_n = u_i\left(q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n-i+1}\right)$$
$$S'_n - qS'_n = u_i\left(1 + q + q^2 + \ldots q^{n-i} - \left(q + q^2 + \ldots + q^{n-i} + q^{n-i+1}\right)\right)$$
$$S'_n(1-q) = u_i\left(1 - q^{n-i+1}\right)$$
$$S'_n = u_i \times \frac{1 - q^{n-i+1}}{1-q}$$

D’une manière générale on peut retenir :

$$S'_n = u_i \times \frac{1 - q^{n-i+1}}{1-q}$$

$$S'_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Sommes des termes d'une suite géométrique, cas général, exemple

Soit une suite géométrique de premier terme réel $u_1 = 10$ et de raison $0,5$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 10 \times 0,5^{n-1}$.

$$S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$S'_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

$S'_n = 10 \times \dfrac{1 - 0,5^n}{1 - 0,5} = 20\left(1 - 0,5^n\right)$

En particulier :

$S'_5 = 20 \times \left(1 - 0,5^5\right) = 19{,}375$

Remarque : avec $u_0 = 20$ on avait $S_5 = u_0 + u_1 + ... + u_5 = 39,375$;

$S'_5 = S_5 - u_0 = 39,375 - 20 = 19,375$.

FIN