Somme de termes d'une suite arithmétique

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Sommes des termes d'une suite, notation

Soit une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n.

D'une manière générale, la suite (S_n) de la somme des termes de la suite (u_n) se note :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$
$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i.$$

Sommes des termes d’une suite arithmétique exemple

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} s & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 \\ s & = & 7 & + & 6 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2s & = & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 \end{array}$$

$$2s = 7 \times 8 \Longleftrightarrow S_n = 7 \times 4 = 28$$

Sommes des termes d'une suite arithmétique, général

Soit n un entier naturel :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
s_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
s_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2s_n & = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \dots & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1
\end{array}$$

$$2s_n = n(n+1) \Longleftrightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit une suite arithmétique de premier terme réel u_0 et de raison r.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + nr$$
$$S_n = (n+1)u_0 + r + 2r + \ldots + nr$$
$$S_n = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \ldots + n)$$
$$S_n = (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = (n+1)\left(u_0 + \frac{nr}{2}\right)$$
$$S_n = (n+1) \times \frac{2u_0 + nr}{2}$$
$$S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_0 + nr}{2}$$
$$S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Sommes des termes d'une suite arithmétique, cas général

Soit une suite arithmétique de premier terme réel u_0 et de raison r.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$
D'une manière générale on peut retenir :

$$S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$S_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Sommes des termes d'une suite arithmétique, cas général, exemple

Soit une suite arithmétique de premier terme réel $u_0 = 3$ et de raison $0,5$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = 3 + 0,5n$.
En particulier $u_{10} = 8$.

$S_{10} = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$
$S_{10} = 3 + 3,5 + 4 + 4,5 + 5 + 5,5 + 6 + 6,5 + 7 + 7,5 + 8 = 60,5$

$$S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$S_{10} = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$
$S_{10} = (10+1) \times \frac{3+8}{2} = \frac{121}{2} = 60,5$

Sommes des termes d'une suite arithmétique, cas général, exemple

Soit une suite arithmétique de premier terme réel $u_0 = 3$ et de raison $0,5$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = 3 + 0,5n$.

$$S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$S_n = (n+1) \times \frac{3+3+0,5n}{2} = (n+1)(3+0,25n) = \frac{(n+1)(12+n)}{4}$$

Sommes des termes d'une suite arithmétique, cas général

Soit une suite arithmétique de premier terme réel u_i et de raison r, i est un entier naturel.

Pour tout entier naturel n supérieur à i, $u_n = u_i + (n-i)r$

$$S'_n = u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \ldots + u_n = u_i + u_i + r + u_i + 2r + \ldots + u_i + (n-i)r$$
$$S'_n = (n-i+1)u_i + r + 2r + \ldots + (n-i)r$$
$$S'_n = (n-i+1)u_i + r(1 + 2 + \ldots + (n-i))$$
$$S'_n = (n-i+1)u_i + r \times \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$$
$$S'_n = (n-i+1)\left(u_i + \frac{(n-i)r}{2}\right)$$
$$S'_n = (n-i+1) \times \frac{2u_i + (n-i)r}{2}$$
$$S'_n = (n-i+1) \times \frac{u_i + u_i + (n-i)r}{2}$$
$$S_n = (n-i+1) \times \frac{u_i + u_n}{2}$$

Soit une suite arithmétique de premier terme réel u_i et de raison r, i est un entier naturel.

Pour tout entier naturel n supérieur à i, $u_n = u_i + (n - i)r$

$S'_n = u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + ... + u_n$

D'une manière générale on peut retenir :

$$S'_n = (n - i + 1) \times \frac{u_i + u_n}{2}$$

$$S_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Sommes des termes d'une suite arithmétique, cas général, exemple

Soit une suite arithmétique de premier terme réel $u_1 = 3,5$ et de raison $0,5$.

Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = u_0 + nr = 3,5 + 0,5(n-1)$.

$$S'_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$S'_n = u_1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$S'_n = n \times \dfrac{3,5 + 3,5 + 0,5(n-1)}{2} = n(3,25 + 0,25n) = \dfrac{n(13+n)}{4}$

En particulier :

$S'_{10} = \dfrac{10 \times (13 + 10)}{4} = 57,5.$

Remarque : avec $u_0 = 3$ on avait $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = 60,5$;

$S'_{10} = S_{10} - u_0 = 60,5 - 3 = 57,5.$

FIN