Produit scalaire
Droites exemples

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

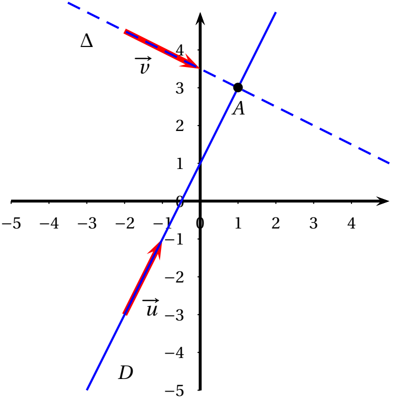
Théorème

Dans un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ du plan, soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$
(a et b non tous les deux nuls) et un point $A(x_A;y_A)$.
On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur directeur de la droite D de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Soit un point $M(x\,;\,y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$.
M appartient à la droite Δ perpendiculaire à la

droite D passant par A
si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{u}=0$.
si et seulement si $-b(x-x_A)+a\left(y-y_A\right)=0$
si et seulement si $-bx+ay+bx_A-ayA=0$.

Une droite Δ d'équation
$-bx+ay+bx_A-ay_A=0$ passe par A, elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}=-ba+ab=0$.
Les droites Δ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires.



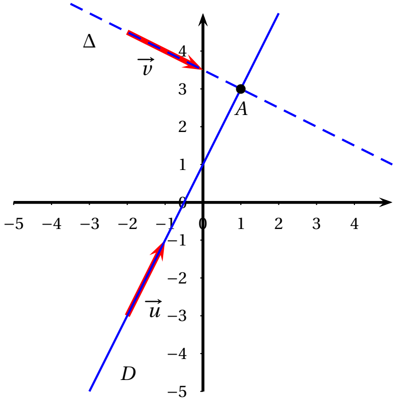
Théorème

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan, soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite
$y = mx + p$,
(m réel non nul) et un point $A(x_A; y_A)$.
On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur directeur de la droite D de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Soit un point $M(x\,;\,y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$.
M appartient à la droite Δ perpendiculaire à la

droite D passant par A
si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{u} = 0$.
si et seulement si $1.(x - x_A) + m\left(y - y_A\right) = 0$
si et seulement si $x + my - x_A - myA = 0$.
si et seulement si $y = \frac{-1}{m}x + \frac{x_A}{m} + y_A$.
Une droite Δ d'équation

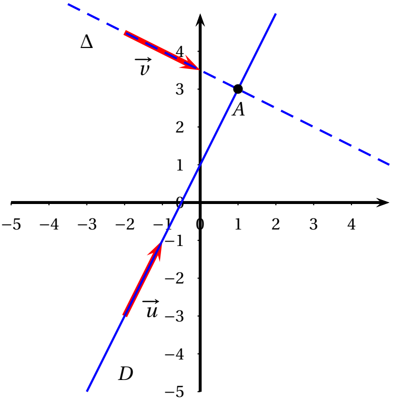
$y = \frac{-1}{m}x + \frac{x_A}{m} + y_A$ passe par A, elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{m} \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = 1 \times 1 + m \times \frac{-1}{m} = 0$.
Les droites Δ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires.



Exemple

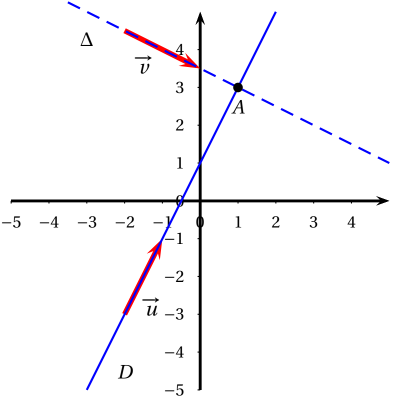
Dans un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ du plan, soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne
$x-0,5y+0,5=0$
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0,5\\1\end{pmatrix}$ dirige de la droite D
Soit $A(1\ ;\ 3)$ point de $\mathscr{D}$ et $M(x\ ;\ y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}$
M est sur la perpendiculaire à Δ passant par A
si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{u}=0$.
si et seulement si $0,5(x-1)+1(y-3)=0$.
si et seulement si $0,5x+y-3,5=0$.

La droite Δ d'équation $0,5x+y-3,5=0$ passe par A, elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\0,5\end{pmatrix}$ et elle est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.



Exemple

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite $y = 2x + 1$,
$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige de la droite D
Soit $A(1\ ;\ 3)$ point de $\mathscr{D}$ et $M(x\ ;\ y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$
M est sur la perpendiculaire à Δ passant par A si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\vec{u} = 0$.
si et seulement si $(x-1) + 2(y-3) = 0$.
si et seulement si $x + 2y - 7 = 0$.
si et seulement si $y = -0,5x + 3,5$.



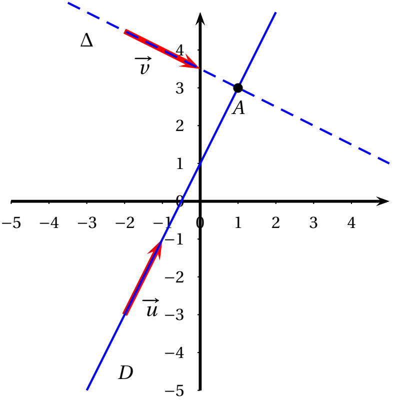
La droite Δ d'équation $x + 2y - 7 = 0$ ou $y = -0,5x + 3,5$ passe par A, elle a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ et elle est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.

Le produit des coefficients directeurs est -1.

Exemple

Dans un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ du plan, soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite $y=2x+1$,
Soit $A(1\,;\,3)$ point de $\mathscr{D}$

Le produit des coefficients directeurs de deux droites perpendiculaires (non parallèles aux axes) est -1.
La droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A a pour équation réduite
$y=-0,5x+0,5\times1+3$ soit $y=-0,5x+3,5$.



FIN