Produit scalaire
Définitions, propriétés et exemples

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Introduction

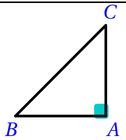
Une nuit d'hiver, une fille tire le traineau rempli de cadeaux et le chat retient le retient pour ne pas qu'il tombe !...

missartem - pixabay.com

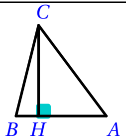
Le travail d'une force :

	
Le travail de la force accompagne le mouvement : Il est positif	Le travail de la force est opposé au mouvement : Il est négatif

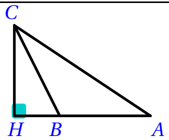
Introduction



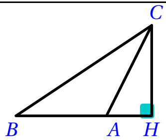
$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0$$



$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 - BC^2 \\ & = AB^2 + (AH^2 + HC^2) - (BH^2 + HC^2) \\ & = AB^2 + AH^2 - BH^2 \\ & = AB^2 + AH^2 - (AB - AH)^2 \\ & = AB^2 + AH^2 - (AB^2 - 2AH.AB + AB^2) \\ & = 2AH.AB \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 - BC^2 \\ & = AB^2 + (AH^2 + HC^2) - (BH^2 + HC^2) \\ & = AB^2 + AH^2 - BH^2 \\ & = AB^2 + AH^2 - (AH - AB)^2 \\ & = AB^2 + AH^2 - (AH^2 - 2AB.AH + AH^2) \\ & = 2AH.AB \end{aligned}$$

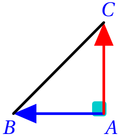


$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 - BC^2 \\ & = AB^2 + (AH^2 + HC^2) - (BH^2 + HC^2) \\ & = AB^2 + AH^2 - BH^2 \\ & = AB^2 + AH^2 - (AH + AB)^2 \\ & = AB^2 + AH^2 - (AH^2 + 2AB.AH + AH^2) \\ & = -2AH.AB \end{aligned}$$

Introduction

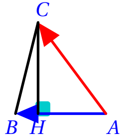
ABC est un triangle et H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre $\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$, on le note $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



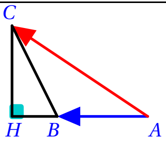
$AB^2+AC^2-BC^2=2AH.AB=0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH.AB=0$



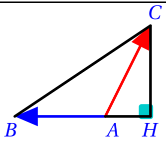
$AB^2+AC^2-BC^2=2AH.AB$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH.AB$



$AB^2+AC^2-BC^2=2AH.AB$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH.AB>0$

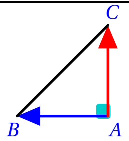


$AB^2+AC^2-BC^2=-2AH.AB$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AH.AB<0$

Définition du produit scalaire

ABC est un triangle et H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

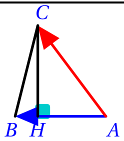


$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AH.AB = 0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH.AB = 0$$

$$AH = AA = AC \times \cos\left(\widehat{CAB}\right) = AC \times \cos(90) = 0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right)$$

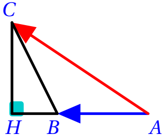


$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AH.AB$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH.AB$$

$$AH = AC \times \cos\left(\widehat{HAC}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right)$$

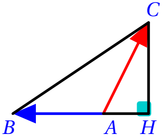


$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AH.AB$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH.AB > 0$$

$$AH = AC \times \cos\left(\widehat{CAB}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right)$$



$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = -2AH.AB$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AH.AB < 0$$

$$AH = AC \times \cos\left(\widehat{HAC}\right)$$

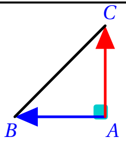
$$AH = AC \times \cos\left(180 - \widehat{CAB}\right)$$

$$AH = -AC \times \cos\left(\widehat{CAB}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right)$$

Définition du produit scalaire

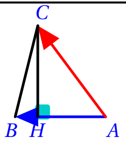
ABC est un triangle et H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AH.AB = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH.AB = 0$

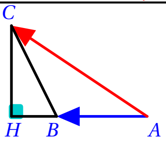
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right)$



$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AH.AB$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH.AB$

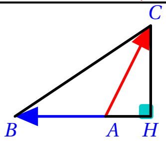
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right)$



$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AH.AB$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH.AB > 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right)$



$AB^2 + AC^2 - BC^2 = -2AH.AB$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AH.AB < 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right)$

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est définit par :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AH}.\overline{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right)$$

Définitions du produit scalaire

Soient les points A, B et C du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) \qquad (1)$$

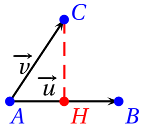
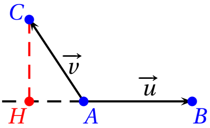
$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AH} \qquad (2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right) \qquad (3)$$

Si les points sont dans un plan muni d'un repère **orthonormé** $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ tels que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' \qquad (4)$$

On a pourra ne retenir que les deux configurations suivantes :

	
$\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB}.\overline{AH} = AB \times AH$	$\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB}.\overline{AH} = -AB \times AH$

Définitions du produit scalaire

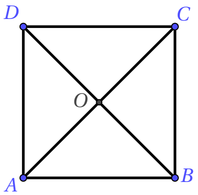
Soient les points A, B et C du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Si les points sont dans un plan muni d'un repère **orthonormé** $\left(O;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ tels que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' \qquad (4)$$

On rappelle : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

En particulier,
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = x^2 + y^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$.
On pourra noter : $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre O :



Calculer $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB}$.

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) \qquad (1)$$

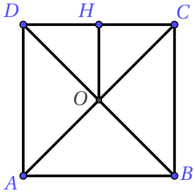
$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DO}$

$DC^2 = 16$; $DO^2 = \frac{1}{4}\left(4^2 + 4^2\right) = 8$; $OC^2 = DO^2 = 8$.

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\left(DC^2 + DO^2 - OC^2\right) = \dfrac{16+8-8}{2} = 8$.

Produit scalaire, exemples de calculs

$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre O :



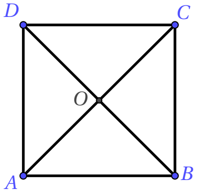
Calculer $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB}$.

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AH} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DO} = \overline{DC}.\overline{DH} = DC.DH = 8 \times 4 = 8$$

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DO} = \overline{DO}.\overline{DO} = DO^2 = 8$$

$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre O :

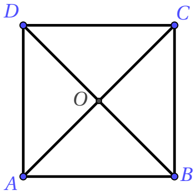


Calculer $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB}$.

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\widehat{CAB}\right) \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} = DC.DO.\cos\left(\widehat{ODC}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{32}}{2} \times \cos(45) = 4 \times \frac{\sqrt{32}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8$$

$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre O :



Calculer $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB}$.

$$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' \qquad (4)$$

Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.
$A(0\ ;\ 0)$; $B(4\ ;\ 0)$; $C(4\ ;\ 4)$; $D(0\ ;\ 4)$; $O(2\ ;\ 2)$.
$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OB} = 4 \times 2 + \times 0 \times (-2) = 8$

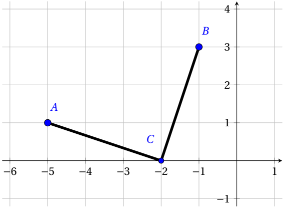
Orthogonalité

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls du plan. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.$$

Orthogonalité, exemple

Dans un repère orthonormé $\left(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$ on donne les points $A(-5\ ;\ 1)$, $B(-1\ ;\ 3)$, $C(-2\ ;\ 0)$.



$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -3 \times 1 + 1 \times 3 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas nuls, leur produit scalaire est nul, donc $(CA) \perp (CB)$.

De plus $CA = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ et $CB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $CA = CB$.

$(CA) \perp (CB)$ et $CA = CB$ donc ACB est un triangle isocèle rectangle en C.

Produit scalaire, propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan, λ un nombre réel :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (commutativité).
- $\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ (distributivité).
- $\left(\lambda\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = \lambda\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)$

Soit un repère orthonormé $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.

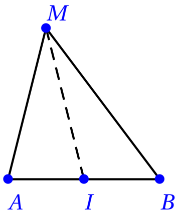
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan :

- $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$ soit $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$,
- $\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$ soit $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$,
- $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right).\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$.

Produit scalaire, propriétés, exemples de relations à connaître, formules de la médiane dans un triangle

Soient MAB un triangle, et I le milieu du segment $[AB]$.

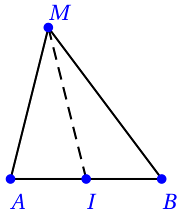
- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$



Produit scalaire, propriétés, exemples de relations à connaître, formules de la médiane dans un triangle

Soient MAB un triangle, et I le milieu du segment $[AB]$.

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$



On rappelle : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

$$MA^2 + MB^2 = \|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 =$$

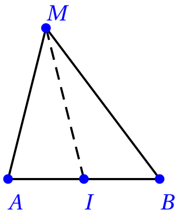
$$2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + 2 \times \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2$$

$$MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{0} + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} = 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2}$$

Produit scalaire, propriétés, exemples de relations à connaître, formules de la médiane dans un triangle

Soient MAB un triangle, et I le milieu du segment $[AB]$.

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$



On rappelle : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

$$MA^2 - MB^2 = \|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$

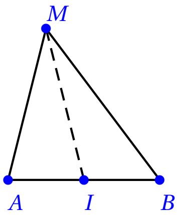
$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - \left(\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2\right) = 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right)$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI}\right) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$

Produit scalaire, propriétés, exemples de relations à connaître, formules de la médiane dans un triangle

Soient MAB un triangle, et I le milieu du segment $[AB]$.

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$



On rappelle : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$

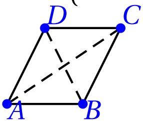
$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$MA^2 + MB^2 = MI^2 + \overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{0} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 = MI^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$$

Produit scalaire, propriétés, exemples de relations à connaître, identité du parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme :

$$AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)$$



$$\begin{aligned}
AC^2 + BD^2 &= \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BD}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\|^2 \\
&= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} + \|\overrightarrow{CD}\|^2 \\
&= 2\|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AD}\|^2 + 2\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) \\
&= 2\|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AD}\|^2 + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{0} \\
&= 2\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)
\end{aligned}$$

Produit scalaire, propriétés, exemples de relations à connaître, inégalité triangulaire

soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs,

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|.$$

$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\left(\|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{u}\|\right)^2$
$=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2-\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+2\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|+\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$
$=2\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|\cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)-2\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|$
$=2\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|\left(\cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)-1\right)$

$-1\leqslant\cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)\leqslant 1$ donc $\cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)-1\leqslant 0$ et
$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\left(\|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{u}\|\right)^2\leqslant 0$ soit $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2\leqslant\left(\|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{u}\|\right)^2$.
Les normes sont positives, la fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc l'ordre des images de $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2$ et $\left(\|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{u}\|\right)^2$ est conservé par composition avec la fonction racine carrée :
$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|\leqslant\|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|$

FIN