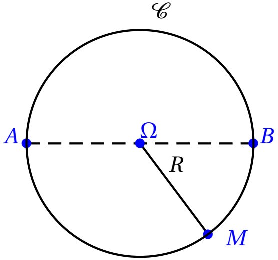
Produit scalaire
Équation d'un cercle exemples

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Théorème 1

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$, soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R, R réel strictement positif.

Soit M un point de coordonnées $(x\,;\ y)$, on a $\overrightarrow{M\Omega}\begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix}$.

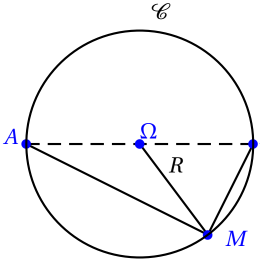


Un point M appartient au cercle $\mathscr{C}$:
si et seulement si $M\Omega = R$,
si et seulement si $\sqrt{(x-x_\Omega)^2 + \left(y-y_\Omega\right)^2} = R$,
si et seulement si $M\Omega^2 = R^2$,
si et seulement si $(x-x_\Omega)^2 + \left(y-y_\Omega\right)^2 = R^2$.

Théorème 2

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$, soit $A(x_A\,;\ y_A)$ et $B(x_B\,;\ y_B)$ deux points qui définissent le diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$, $A \neq B$.

Soit M un point de coordonnées $(x\,;\ y)$, on a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} x-x_B \\ y-y_B \end{pmatrix}$.



Un point M appartient au cercle $\mathscr{C}$:
si et seulement si MAB **est un triangle rectangle en** M,
si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0.$,
si et seulement si $(x-x_A)(x-x_B) + \left(y-y_A\right)\left(y-y_B\right) = 0$.

Équation d'un cercle

Soit un repère orthonormé $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Soit M un point de coordonnées $(x\,;\ y)$ sur le cercle de diamètre $[AB]$ et Ω milieu de $[AB]$.
D'après les théorèmes 1 et 2, avec les mêmes notations, les coordonnées de M vérifient :

- $(x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2=R^2 \iff x^2+y^2-2x_\Omega x-2y_\Omega y+x_\Omega^2+y_\Omega^2-R^2=0.$
- $(x-x_A)(x-x_B)+\left(y-y_A\right)\left(y-y_B\right)=0 \iff$
  $x^2+y^2-x(x_A+x_B)-y\left(y_A+y_B\right)+x_Ax_B+y_Ay_B=0$

On peut montrer que les deux équations sont identiques en posant :
$x_\Omega=\frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_\Omega=\frac{y_A+y_B}{2}$ avec $R^2=\dfrac{AB^2}{4}=\dfrac{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}{4}$.

Dans les deux cas, M vérifie une équation de la forme :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

avec a, b et c trois réels.

Équation d'un cercle

Soit un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ du plan.
Soit M un point de coordonnées $(x\,;\ y)$ qui vérifie une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$, avec a, b et c trois réels.

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2+ax+by+c=0\\
\iff\quad & x^2+ax+y^2+by+c=0\\
\iff\quad & \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c=0\\
\iff\quad & \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}
\end{aligned}$$

- si $\dfrac{a^2+b^2-4c}{4}<0$ alors aucun point $M(x\,;\ y)$ du plan ne vérifie l'équation.
- si $\dfrac{a^2+b^2-4c}{4}=0$ alors l'unique point $M\left(\dfrac{-a}{2}\,;\ \dfrac{-b}{2}\right)$ vérifie l'équation.
- si $\dfrac{a^2+b^2-4c}{4}>0$, en posant $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2-4c}{4}}$ et Ω le point de coordonnées $\left(\dfrac{-a}{2}\,;\ \dfrac{-b}{2}\right)$, les points M appartiennent au cercle de centre Ω et de rayon R.
  L'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$ est appelée équation cartésienne du cercle de centre Ω et de rayon R.

Tout point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ qui vérifient une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$ définit un cercle, un point ou l'ensemble vide.

Équation d'un cercle, exemple

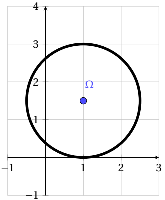
$\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan.

Soit l'équation $x^2+y^2-2x-3y+1=0$.

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-2x-3y+1=0 \\ \iff\quad & x^2-2x+y^2-3y+1=0 \\ \iff\quad & (x-1)^2-1+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1=0 \\ \iff\quad & (x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4} \end{aligned}$$

On a $x^2+y^2-2x-3y+1=0 \iff (x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

L'équation représente le cercle de centre $\Omega\left(1\,;\ \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.



Équation d'un cercle, exemple

On a $x^2+y^2-2x-3y+1=0 \Longleftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

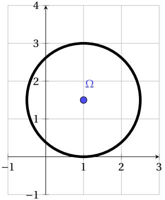
L'équation représente le cercle de centre $\Omega\left(1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

Le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ appartient au cercle, ses coordonnées vérifient l'équation : $1^2+0^2-2\times1-3\times0+1=0$.

Les coordonnées des points d'intersection de l'axe des abscisses avec le cercle vérifient : $x^2+0^2-2x-3\times0+1=0$ ou $(x-1)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

On a $(x-1)^2=0$ soit $x=1$ unique solution de l'équation.

Le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ est l'unique point d'intersection de l'axe des abscisses avec le cercle.



Équation d'un cercle, exemple

On a $x^2+y^2-2x-3y+1=0 \Longleftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$.

L'équation représente le cercle de centre $\Omega\left(1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$.

On peut chercher les coordonnées des points d'intersection du cercle avec l'axe des ordonnées :

$$(0-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4} \Longleftrightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \Longleftrightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\sqrt{\frac{5}{4}}=-\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } y-\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow y=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

On pouvait aussi résoudre l'équation : $0^2+y^2-2\times 0-3y+1=0 \Longleftrightarrow y^2-3y+1=0$.

Les points ont pour coordonnées : $\left(0\ ;\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(0\ ;\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

Équation d'un cercle, exemple

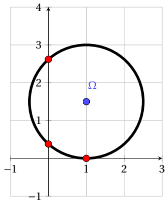
On a $x^2+y^2-2x-3y+1=0 \iff (x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$.

L'équation représente le cercle de centre $\Omega\left(1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$.

Les coordonnées du point d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses : $(1\ ;\ 0)$.

Les coordonnées des points d'intersection du cercle avec l'axe des ordonnées :

$\left(0\ ;\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(0\ ;\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$



FIN