Produit scalaire

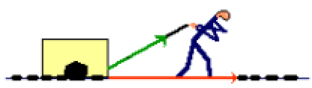
Table des Matières

Produit scalaire

I. Définition et expressions

Activité 1

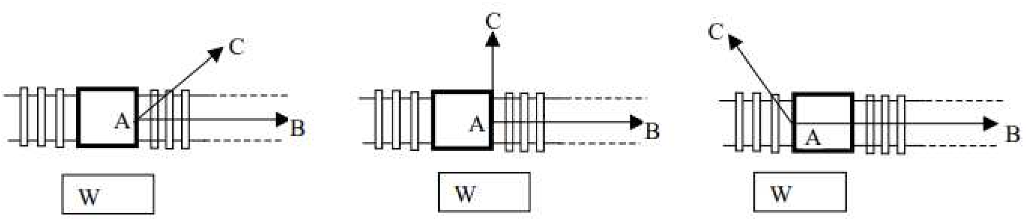
1. Travail d'une force en physique :



Le travail d'une force $\overrightarrow{AC}$ durant le déplacement suivant $\overrightarrow{AB}$ est un nombre W :

- positif lorsque la force favorise le déplacement de A vers B
- négatif lorsque la force s'oppose au déplacement de A vers B
- nul lorsque la force ne contribue pas au déplacement de A vers B

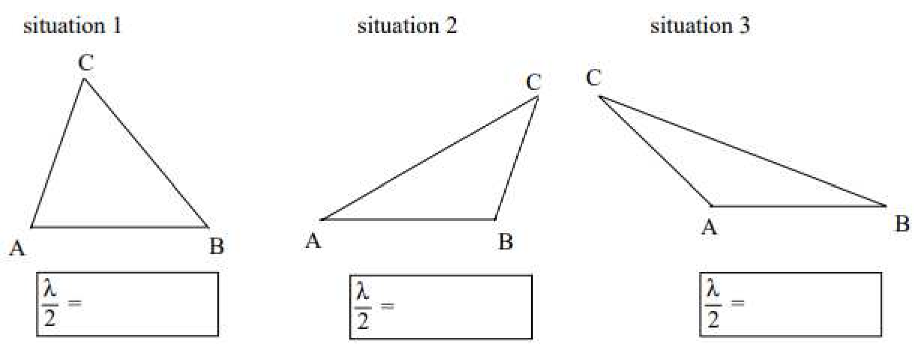
À partir de ce qui précède, associé le signe du nombre W du travail de la force exercée sur un wagonnet :



2. En mathématique :
Étudions le comportement du nombre $\lambda = AB^2 + AC^2 - BC^2$ lorsque C varie dans le plan.

   (a) Si ABC est un triangle rectangle en A que vaut λ ?

   (b) On distingue trois situations :



   Soit H le pied de la hauteur issue de C dans la triangle ABC.
   Justifier les égalités suivantes : $BC^2 = HC^2 + HB^2$ et $AC^2 = HA^2 + HC^2$.

   (c) En déduire que $\lambda = AB^2 + HA^2 - HB^2$.

   (d) Étude des trois situations :

i. Situation 1 : en écrivant $HB = AB - AH$, montrer que : $\lambda = 2AB \times AH$.

ii. Situations 2 : par une démarche analogue à l'étude de la situation 1, montrer que : $\lambda = 2AB \times AH$

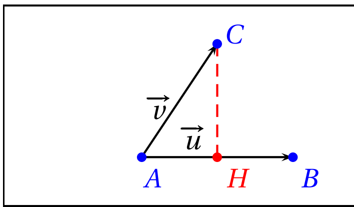
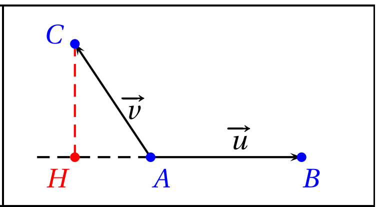
iii. situation 3 : par une démarche analogue à l'étude de la situation 1, montrer que : $\lambda = -2AB \times AH$

✒ Définition

Soient les points A, B et C du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB}.\overline{AH} \qquad (1)$$

On a les deux configurations suivantes :

	
$\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB}.\overline{AH} = AB \times AH$	$\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB}.\overline{AH} = -AB \times AH$

✒ Théorème

Soit un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
Avec les notations de la définition, on a d'autres expressions du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$:

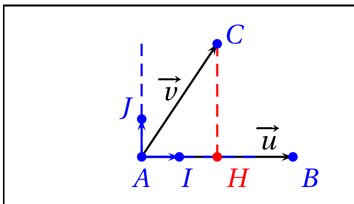
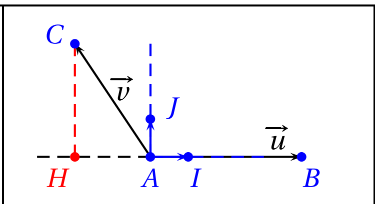
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) \qquad (2)$$

Avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' \qquad (3)$$

☞ Démonstration 1

Avec les deux configurations de la définition, on choisit un repère orthonormé du plan :
Soit le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AJ}\right)$ tel que (AI) est dirigée par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $AJ = AI$ et $\left(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{AJ}\right) = \dfrac{\pi}{2}$:
Exemples de configurations : $O(0\,;\,0)$; $I(1\,;\,0)$; $J(0\,;\,1)$

	
$\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB}.\overline{AH} = AB \times AH$	$\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB}.\overline{AH} = -AB \times AH$

Montrons les équivalences suivantes :

1. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) évident en exprimant $\overline{AH}$.

2. (2) $\Longleftrightarrow$ (3) :
   Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ la démonstration est évidente.
   On a $\vec{u}\begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \|\vec{v}\|.\cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) \\ \|\vec{v}\|.\sin\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) \end{pmatrix}$.
   Conclure.

☞**Exercice 1**

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

✒ **Remarques**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

On a $\sqrt{x^2+y^2} = \|\vec{u}\|$.

- $\vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ implique $\vec{u}.\vec{v} = 0$. (La réciproque est fausse)

☞**Exercice 2**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Montrer que $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ n'est pas nécessairement nul.

☞**Exercice 3**

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ soit les points $A(-1\,;\,-1)$, $B(3\,;\,-1)$ et $C(2\,;\,2)$.

On admet que l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$.

1. Donner les coordonnées du point H projeté de C sur (AB).
2. Vérifier qu'avec chacune des trois expressions du produit scalaire, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12$.

II. Orthogonalité

✒ **Théorème**

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.$$

☞**Démonstration 2**

Laissée en exercice

III. Propriétés du produit scalaire

Théorème

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan, λ un nombre réel :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (commutativité).
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ (distributivité).
- $\left(\lambda\vec{u}\right).\vec{v} = \lambda\vec{u}.\vec{v}$

Démonstration 3

Laissée en exercice.

Exercice 4

Simplifier l'expression suivante : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$.

Corollaire

Soit un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan :

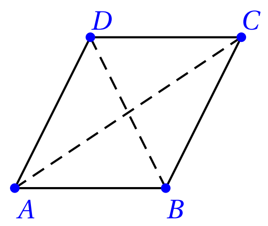
1. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2.\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ soit $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$,
2. $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2.\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ soit $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$,
3. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Théorème

Des relations à connaître :

1. (Identité du parallélogramme) Soit $ABCD$ un parallélogramme, on a :

$$AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)$$



2. (Inégalité triangulaire) soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs,

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Démonstration 4

Laissée en exercice

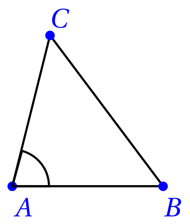
IV. Application du produit scalaire

IV. A. Formule d'Al-Kashi

Théorème

Soit ABC un triangle quelconque, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{A}\right)$$



Démonstration 5

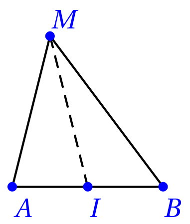
remarquer : $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$

IV. B. Formule de la médiane

Théorème

Soient MAB un triangle, et I le milieu du segment $[AB]$.

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$



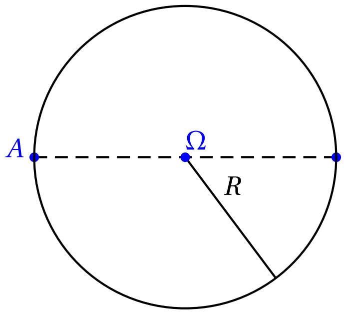
Démonstration 6

Laissée en exercice

IV. C. Équation d'un cercle

✒ **Théorème**

1. Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, soit $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points qui définissent le diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$.
   Un point $M(x\,;\,y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
   $$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$
2. Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R.
   Un point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $M\Omega^2 = R^2$.
   $$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$



✒ **Théorème**

Soit un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ qui vérifient une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ définit un cercle, un point ou l'ensemble vide.

☞**Démonstration 7**

Montrer que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$.
Conclure.

✒ **Définition**

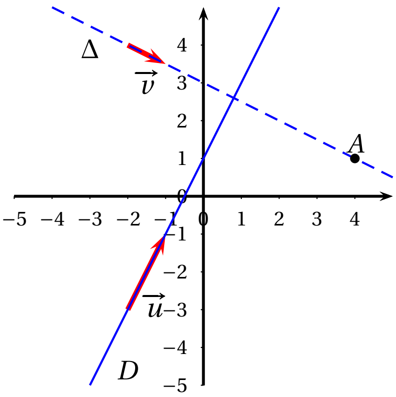
Soit un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.
Une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ telle que $a^2 + b^2 > 4c$ est appelée équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre le point de coordonnées $\left(-\dfrac{a}{2}\,;\,-\dfrac{b}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$.

IV. D. Équation d'une droite perpendiculaire à une autre

Théorème

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan, soit une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ (a et b non tous les deux nuls) et un point $A(x_A; y_A)$.
On note $\vec{u}$ le vecteur directeur de la droite D de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
Un point $M(x_M; y_M)$ appartient à la droite Δ perpendiculaire à la droite D passant par A si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\vec{u}=0$.

$$\Delta : -bx+ay+bx_A-ayA=0.$$



Démonstration 8

Laissée en exercice

Remarques

- un vecteur directeur de la droite Δ, qu'on notera $\vec{v}$, a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on dit que $\vec{v}$ est un vecteur **normal** de la droite D.
  On peut vérifier l'orthogonalité par le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$.
- Deux droites D et Δ d'équation réduite respective $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont perpendiculaires si et seulement si $mm'=-1$.