Probabilité conditionnelle et indépendance

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Soit une probabilité P définie sur un univers Ω et A et B deux événements de Ω.
Pour A non vide, on rappelle $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Pour A non vide, B est indépendant de A si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

On a alors $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ soit $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Si B est indépendant de A et B non vide alors :
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$.
A est indépendant se B.

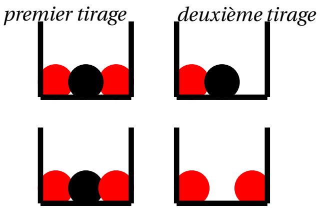
$\emptyset$ est indépendant de Ω car
$P_\Omega(\emptyset) = \dfrac{P(\Omega \cap \emptyset)}{P(\Omega)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(\Omega)} = \dfrac{0}{1} = 0 = P(\emptyset)$.
On souhaiterait que Ω soit indépendant du vide, or on ne peut pas écrire $P_\emptyset(\Omega) = P(\Omega)$ car $P_\emptyset(\Omega) = \dfrac{P(\emptyset \cap \Omega)}{P(\emptyset)}$ et on ne peut pas diviser par 0.
Afin que Ω soit indépendant du vide, on choisira la définition suivante :
Pour tout événement A et B de Ω, A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Remarque : si A et B ne sont pas vides, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Indépendance propriété

Soit une probabilité P définie sur un univers Ω et A et B deux événements de Ω.
Tout événement A est indépendant du vide :
$P(A\cap\emptyset) = P(\emptyset) = 0$ et $P(A)\times P(\emptyset) = P(A)\times 0 = 0$ donc
$P(A\cap\emptyset) = P(A)\times P(\emptyset)$.

Tout événement A est indépendant de l'univers :
$P(A\cap\Omega) = P(A)$ et $P(A)\times P(\Omega) = P(A)\times 1 = P(A)$ donc
$P(A\cap\Omega) = P(A)\times P(\Omega)$.

Une urne contient trois boules, une noire et deux rouges.
Les boules sont indiscernables au toucher.
On tire une boule de l'urne on note sa couleur, puis on tire une deuxième boule de l'urne et on note sa couleur.
A est l'événement tirer une boule rouge au premier tirage et B est l'événement tirer une boule rouge au deuxième tirage.
$\Omega = \{(R_1, R_2)\ ;\ (R_1, N)\ ;\ (R_2, R_1)\ ;\ (R_2, N)\ ;\ (N, R_1)\ ;\ (N, R_2)\}$.

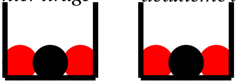


$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\ ;\ P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
$P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.
$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.
Remarque : $P_A(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq P(B)$.

Indépendance exemple

Une urne contient trois boules, une noire et deux rouges.
Les boules sont indiscernables au toucher.
On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule de l'urne, on note sa couleur.
A est l'événement tirer une boule rouge au premier tirage et B est l'événement tirer une boule rouge au deuxième tirage.

$\Omega = \{(R_1,R_1)\ ;\ (R_1,R_2)\ ;\ (R_1,N)\ ;\ (R_2,R_1)\ ;\ (R_2,R_2)\ ;\ (R_2,N)\ ;\ (N,R_1)\ ;\ (N,R_2)\ ;\ (N,N)\}$.



$P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

$P(A \cap B) = \frac{4}{9}$.

$P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

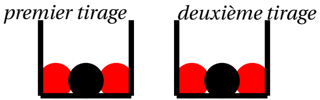
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc A et B sont indépendants.

Remarque : $P_A(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = P(B)$.

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité exemple

A est l'événement tirer une boule rouge au premier tirage et B est l'événement tirer une boule rouge au deuxième tirage.

$\Omega = \{(R_1, R_1) \; ; \; (R_1, R_2) \; ; \; (R_1, N) \; ; \; (R_2, R_1) \; ; \; (R_2, R_2) \; ; \; (R_2, N) \; ; \; (N, R_1) \; ; \; (N, R_2) \; ; \; (N, N)\}$.



A et B sont indépendants.

$A \cap B = \{(R_1, R_1) \; ; \; (R_1, R_2) \; ; \; (R_2, R_1) \; ; \; (R_2, R_2)\} \neq \emptyset$ donc A et B ne sont pas incompatibles.

Soient une probabilité P définie sur un univers Ω et A et B deux événements indépendants de Ω.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B)(1 - P(A))$

$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) \times P\left(\overline{A}\right)$.

Ainsi :

- A et B indépendants $\Longrightarrow \overline{A}$ et B sont indépendants.

indépendance et événements contraires

Soient une probabilité P définie sur un univers Ω et A et B deux événements indépendants de Ω.

- A et B indépendants $\Longrightarrow \overline{A}$ et B sont indépendants.
- $\overline{A}$ et B indépendants $\Longrightarrow \overline{\overline{A}}$ et B sont indépendants
  $\overline{A}$ et B indépendants $\Longrightarrow A$ et B sont indépendants.
- A et B indépendants $\Longleftrightarrow \overline{A}$ et B sont indépendants.

indépendance et événements contraires

Soient une probabilité P définie sur un univers Ω et A et B deux événements indépendants de Ω.

- A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- B et A indépendants $\Longleftrightarrow$ $\overline{B}$ et A sont indépendants.
- A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Soient une probabilité P définie sur un univers Ω et A et B deux événements indépendants de Ω.

- A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ A et $\overline{B}$ sont indépendants.
  $\overline{A}$ et B indépendants $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

indépendance et événements contraires

Soient une probabilité P définie sur un univers Ω et A et B deux événements indépendants de Ω.

- A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ A et $\overline{B}$ sont indépendants.
  $\overline{A}$ et B indépendants $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
- A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

indépendance et événements contraires

Soient une probabilité P définie sur un univers Ω et A et B deux événements indépendants de Ω.

En conclusion :

- A et B indépendants $\iff$ $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- A et B indépendants $\iff$ A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- A et B indépendants $\iff$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

FIN