probabilité conditionnelle

Table des Matières

probabilité conditionnelle

I. Introduction

I. A. Introduction par les fréquences en ligne et en colonne, tableaux croisés

Activité 1

Le tableau suivant donne les catégories socioprofessionnelles selon le sexe, en 2018 en France, parmi les personnes ayant un emploi.

La lecture du tableau se fait en colonne, chaque colonne est indépendante, on parle de tableau de fréquences en colonne.

	Femmes	Hommes
Agriculteurs exploitants	0,8	2,2
Artisans, commerçants, chefs d'entreprises	3,8	8,9
Cadres et professions intellectuelles supérieures	15,7	20,8
Professions intermédiaires	28,3	23,3
Employés	42,7	12,6
Ouvriers	8,3	31,7
Non déterminé	0,4	0,5
Total	100,0	100,0
Effectif (en milliers)	13 091	14 031

d'après l'INSEE

lecture : en 2018, 28,3 % des femmes ayant un emploi en France sont cadre ou ont une profession intellectuelle supérieure.

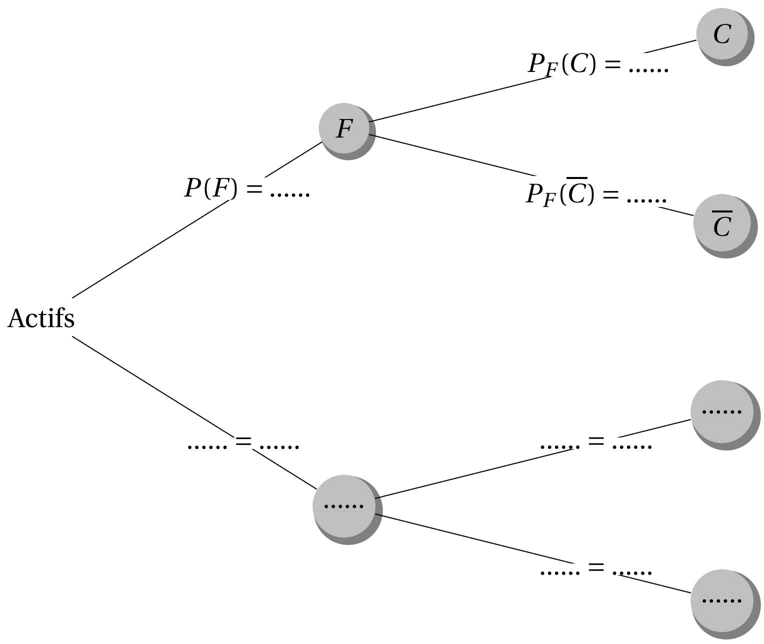
Champ : France hors Mayotte, population des ménages, personnes en emploi.

On choisit au hasard un actif de la population française. On note les événements suivants :

- F : « l'actif est une femme »,
- C : « l'actif est dans la catégorie cadres et professions intellectuelles supérieures ».

1. Lecture du tableau :
   (a) On choisit une femme active au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit cadre ou exerce une profession intellectuelle supérieure ? On note cette probabilité $P_F(C)$.
   (b) Décrire la probabilité $P_F(\overline{C})$ puis calculer sa probabilité.
   (c) Décrire la probabilité $P_{\overline{F}}(C)$ puis calculer sa probabilité.
   (d) Décrire la probabilité $P_{\overline{F}}(\overline{C})$ puis calculer sa probabilité.

2. Organisation d'un arbre pondéré de probabilités : compléter l'arbre suivant :



3. Recherche du tableau des fréquences :

   (a) On choisit un actif au hasard, calculer la probabilité qu'il soit une femme dans la catégorie cadres et professions intellectuelles supérieures, soit $P(F \cap C)$. Comparer avec le produit $P(F) \times P_F(C)$.

   (b) Compléter le tableau des fréquences :

	Femmes	Hommes	Total
Agriculteurs exploitants	0,39	1,14	1,52
Artisans, commerçants, chefs d'entreprises	1,83	4,60	6,44
Cadres et professions intellectuelles supérieures	7,58	10,76	18,34
Professions intermédiaires			
Employés	20,61	6,52	27,13
Ouvriers	4,01	16,4	20,41
Non déterminé	0,19	0,26	0,45
Total			100,0

   (c) Calculer la probabilité $P_C(F)$.

I. B. Approche historique

En 1713, Nicolas Bernoulli publie un essai de son oncle Jacques Bernoulli, titré *Ars Conjectandi* (l'art de la conjecture), en latin, où il expose l'application des probabilités à la modélisation de la recherche scientifique. Dans cet ouvrage, Bernoulli pose, entre autres, le « problème inverse » :
Une urne contient des boules blanches et noires ; la proportion p de boules blanches est inconnue. On extrait de l'urne n boules (par exemple, avec remise) et on constate que k d'entre elles sont blanches. Que peut-on inférer sur le nombre p à partir de n et k ?
Il est difficile de savoir quand exactement Thomas Bayes a résolu le problème inverse. Sa solution a été publiée en 1763 dans les compte-rendus de la société philosophique royale de Londres, mais c'est son ami Richard Price qui a publié l'article au nom de Bayes, alors décédé, après avoir quelque peu complété l'article.
En 1774, Pierre-Simon de Laplace publie un Essai philosophique sur les probabilités, dans lequel figure la définition d'une probabilité conditionnelle et qui ressemble beaucoup à la traduction du texte de Bayes.

> PROP. 5.
>
> If there be two ſubſequent events, the probability of the 2d $\frac{b}{N}$ and the probability of both together $\frac{P}{N}$, and it being 1ſt diſcovered that the 2d event has happened, from hence I gueſs that the 1ſt event has alſo happened, the probability I am in the right is $\frac{P}{b}$†.

text original sur https://royalsocietypublishing.org/

Si on considère deux évènements successifs, la probabilité du second étant $\dfrac{b}{N}$ et la probabilité que les deux surviennent étant $\dfrac{p}{N}$, et si on apprend que le second évènement est effectivement survenu, la probabilité que le premier soit survenu aussi est $\dfrac{P}{b}$.

> 7. Events are independent when the happening of any one of them does neither increaſe nor abate the probability of the reſt.

text original sur https://royalsocietypublishing.org/

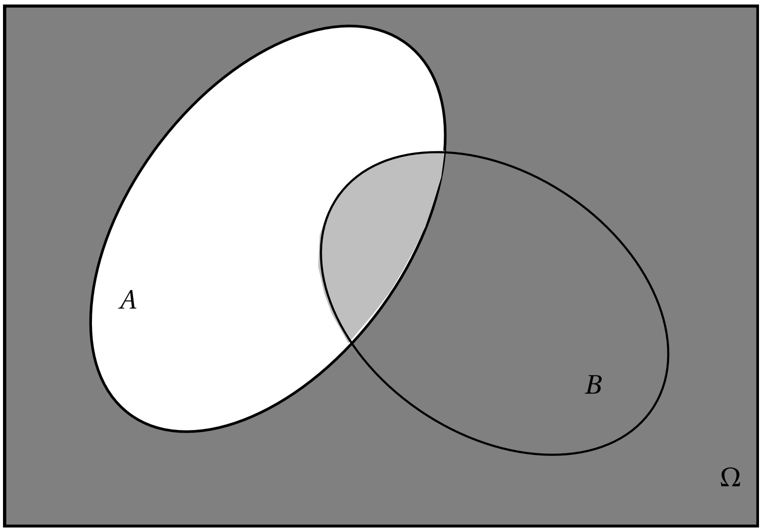
Quand deux événements dépendent l'un de l'autre, la probabilité de l'évènement composé est le produit de la probabilité du premier évènement, par la probabilité que cet évènement étant arrivé, l'autre arrivera.

I. C. Définition

Définition

Soit une probabilité P définie sur un univers Ω.
Soient A et B deux événements de Ω, A est non vide. La probabilité conditionnelle de B sachant A (ou B parmi A), notée $P_A(B)$, est donnée par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (1)$$



ce qui équivaut à :

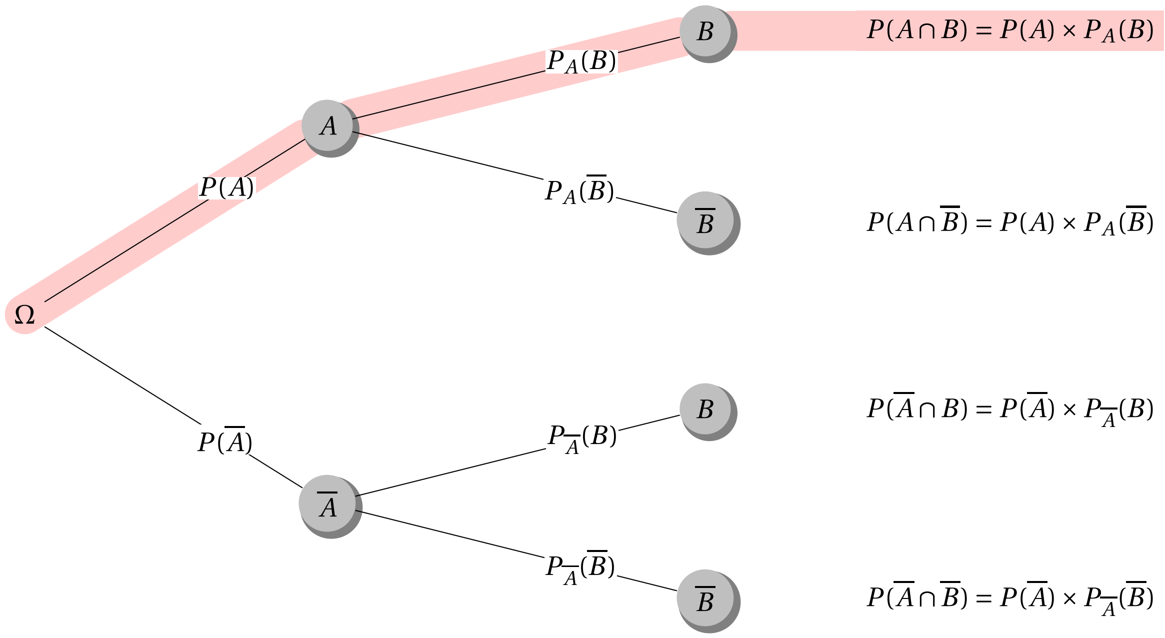
$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \qquad (2)$$

Remarques

- Pour tout événement B de Ω, on a $P_\Omega(B) = P(B)$,
- Pour tout événement non vide A de Ω, $P_A(\emptyset) = 0$,
- Pour tout événement non vide A de Ω, $P_A(\Omega) = 1$,
- Pour tout événement non vide A de Ω, $P_A(A) = 1$.
- Pour tout événement B de Ω tel que $A \in B$ et A non vide, $P_A(B) = 1$.

II. Lecture sur l'arbre pondéré de probabilités

Soit une probabilité P définie sur un univers Ω.
Soient A et B deux événements de Ω, A est non vide.



Propriété

La somme des probabilités à chaque nœud de l'arbre est 1 :

- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$
- $P_{\overline{A}}(B) + P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1$

Démonstration 1

- Faite en seconde,
- Laissée en exercice en vous aidant de la définition et de son schéma,
- Laissée en exercice.

Propriété

La somme des probabilités des intersections au bout de l'arbre est 1 :

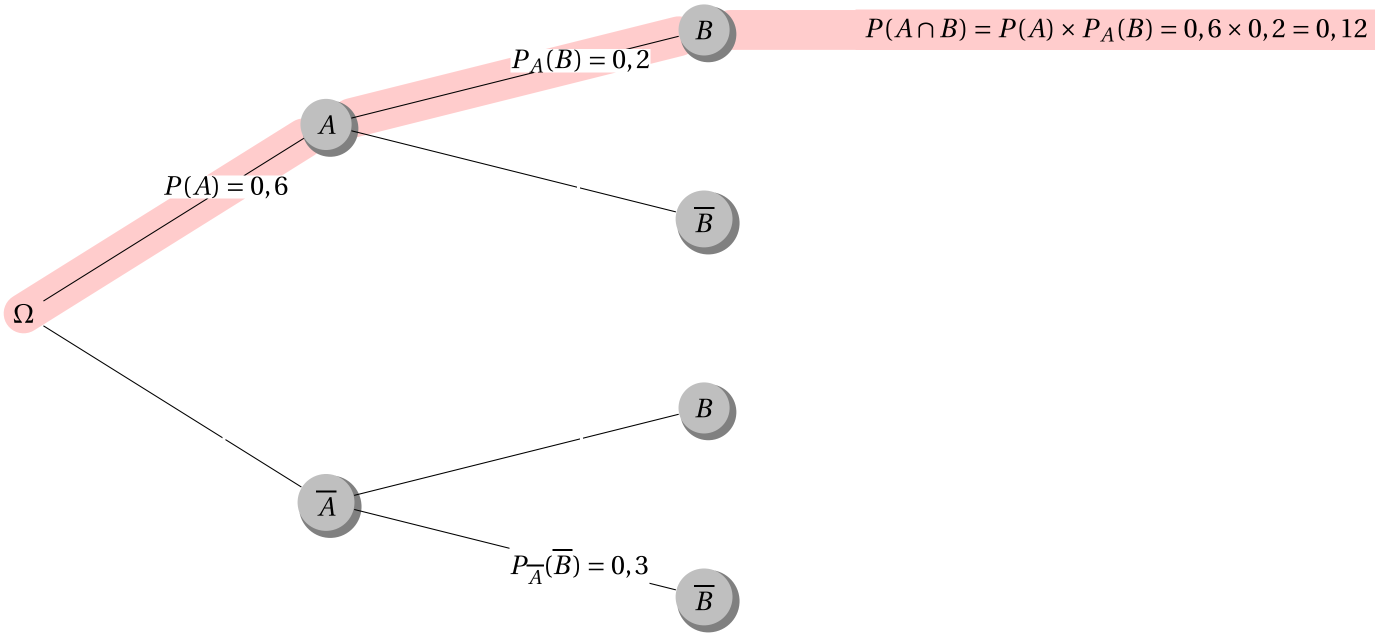
$$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1$$

Démonstration 2

Laissée en exercice

☞**Exercice 1**

Compléter l'arbre de probabilité suivant et vérifier vos résultats des probabilités des intersections :

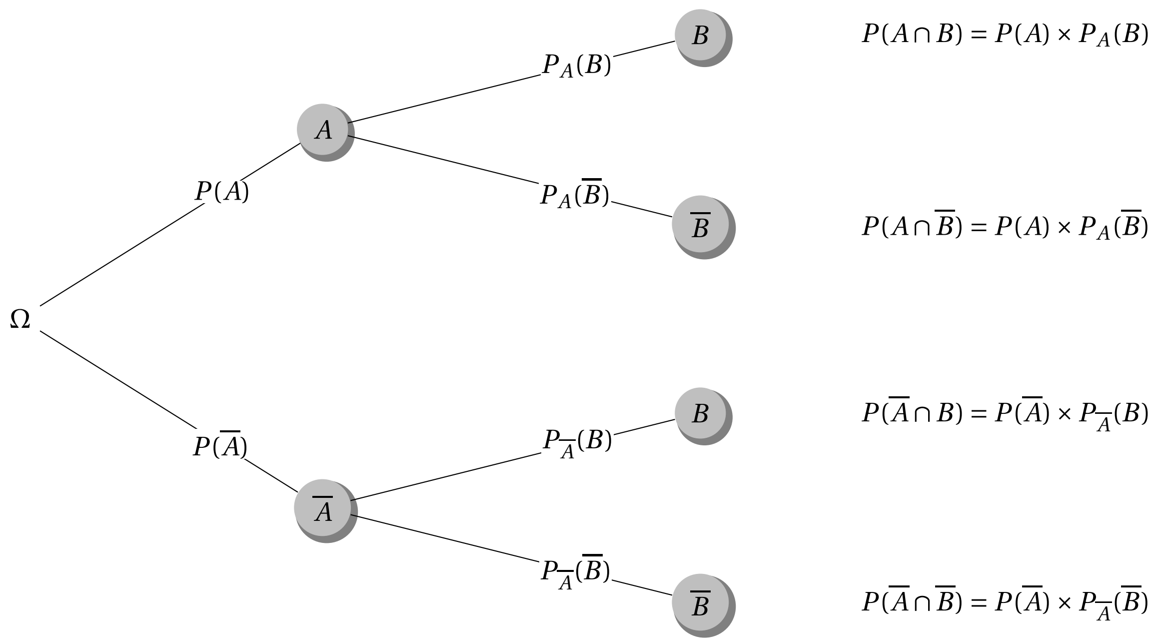


III. Formule des probabilités totales :

III. A. Cas de deux événements

Propriété

Soient une probabilité P définie sur l'univers Ω et A et B deux événements de Ω, A est non vide.
On considère l'arbre de probabilité suivant :



La probabilité de l'événement B est donnée par :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \quad (3)$$

☞**Démonstration 3**

Laissée en exercice

☞**Exercice 2**

Dans une population,

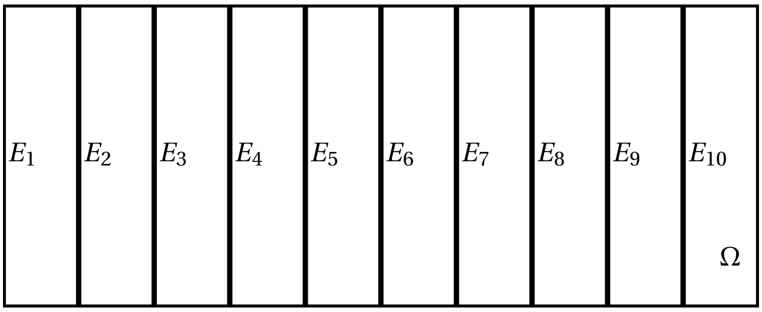
III. B. Cas général

Définition

On dit que des événements E_1, E_2,...,E_n forment une partition d'un univers Ω si :

- les événements E_i $(i \in \{1, 2, ..., n\})$ sont deux à deux disjoints.
- $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = \Omega$.

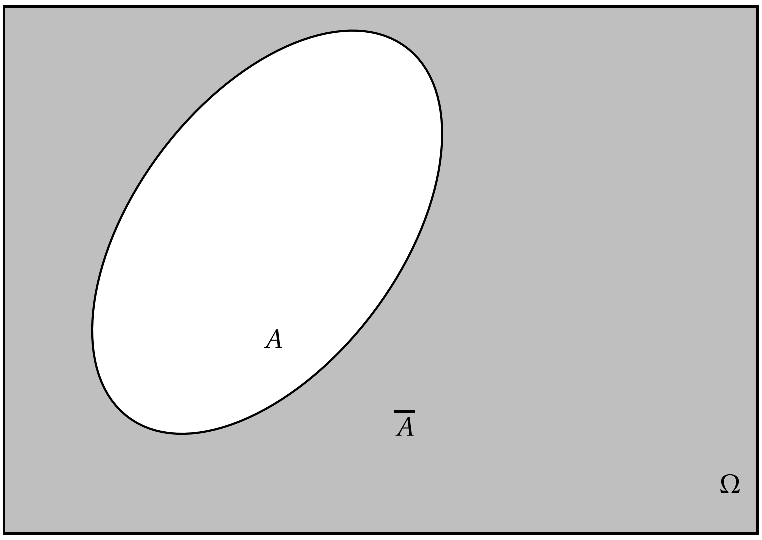
Exemple d'illustration pour $n = 10$:



Remarque

Les événements A et $\overline{A}$ d'un univers Ω forment une partition de l'univers :

- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = \Omega$



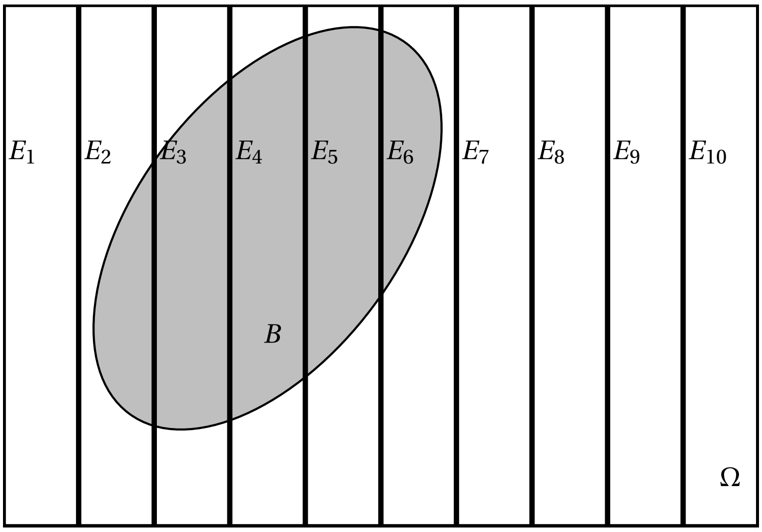
Propriété

Soit un univers Ω, une partition E_1, E_2,...,E_n de Ω et B un événement de Ω et P une probabilité définie sur Ω.

$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \ldots + P(B \cap E_n)$

$P(B) = P_{E_1}(B) \times P(E_1) + P_{E_2}(B) \times P(E_2) + \ldots + P_{E_n}(B) \times P(E_n)$

Exemple d'illustration pour $n = 10$:



Dans cette illustration, on peut restreindre $P(B)$ à

$P(B) = P(B \cap E_2) + P(B \cap E_3) + P(B \cap E_4) + P(B \cap E_5) + P(B \cap E_6)$

car $E_1 \cap B = E_7 \cap B = E_1 \cap B = E_8 \cap B = E_9 \cap B = E_{10} \cap B = \emptyset$

Les événements E_2, E_3, E_4, E_5 et E_6 forment une partition de l'événement A.

Exercice 3

En France,

- 42% des personnes sont du groupe sanguin O et parmi ces personnes 86% sont de rhésus +,
- 45% des personnes sont du groupe sanguin A et parmi ces personnes 84% sont de rhésus +,
- 9% des personnes sont du groupe sanguin B et parmi ces personnes 88% sont de rhésus +,
- 4% des personnes sont du groupe sanguin AB et parmi ces personnes 75% sont de rhésus +,

D'après Wikipédia

On choisit un français au hasard,

1. Réaliser un arbre pondéré de probabilités,
2. Calculer la probabilité que la personne soit du rhésus +.
3. Calculer de deux manières la probabilité que la personne soit de rhésus -.

IV. Indépendance de deux événements

Activité 2

Une urne contient 3 boules rouges, une bleue et une verte. On réalise deux tirages successifs, le but de l'activité est de comparer des tirages avec remise ou sans remise.

1. Tirage avec remise : on tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on tire à nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur. On note A et B les événements "la boule au premier tirage est rouge" et "la boule au deuxième tirage est rouge".
   (a) Faire un arbre de la situation.
   (b) Calculer $P(A)$ puis $P(B)$ puis $P(A \cap B)$.
   (c) Calculer $P_A(B)$ puis $P_B(A)$.
2. Tirage sans remise : on tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on ne la remet pas dans l'urne et on tire à nouveau une boule de l'urne et on note sa couleur. On note A et B les événements "la boule au premier tirage est rouge" et "la boule au deuxième tirage est rouge".
   (a) Faire un arbre de la situation.
   (b) Calculer la probabilité $P(A)$ puis $P(B)$ puis $P(A \cap B)$.
   (c) Calculer $P_A(B)$ puis $P_B(A)$.
3. Dans quelle situation a-t-on $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$?

Bayes définie la notion de deux événements indépendants :

> 7. Events are independent when the happening of any one of them does neither increaſe nor abate the probability of the reſt.

text original sur https://royalsocietypublishing.org/

Deux évènements sont indépendants lorsque la survenue du premier ne modifie pas la probabilité du second.

Définition

Soit un univers Ω et P une probabilité définie sur Ω. On dit que A et B sont indépendants si :

$$P(A) \times P(B) = P(A \cap B).$$

si A et B ne sont pas vides alors $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.

Exercice 4

Soient deux événements indépendants A et B d'un univers Ω et P une probabilité définie que Ω tels que $P(A) = 0,1$ et $P(B) = 0,6$. Déterminer $P(A \cup B)$.

Propriété

Si A et B deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont deux événements indépendants.

Démonstration 4

Laissée en exercice.