Fonction polynôme du second degré
Variations et représentation graphique

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta = b^2 - 4ac$, la **forme canonique** de f est :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Le tableau de variations de la fonction carré :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta = b^2 - 4ac$, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

Si $a < 0$

$x_1 < x_2 < -\dfrac{b}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a} < x_1 < x_2$
$x_1 + \dfrac{b}{2a} < x_2 + \dfrac{b}{2a} < 0$ $\left(x_1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ $a\left(x_1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 < a\left(x_2 + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ $a\left(x_1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} < a\left(x_2 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$	$0 < x_1 + \dfrac{b}{2a} < x_2 + \dfrac{b}{2a}$ $\left(x_1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ $a\left(x_1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > a\left(x_2 + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ $a\left(x_1 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \dfrac{\Delta}{4a} > a\left(x_2 + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$
$f(x_1) < f(x_2)$ f croissante sur $\left]-\infty\,;\ -\dfrac{b}{2a}\right[$	$f(x_1) > f(x_2)$ f décroissante sur $\left]-\dfrac{b}{2a}\,;\ +\infty\right[$

Variations

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$$\Delta = b^2 - 4ac, f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Si $a < 0$

$x_1 < x_2 < -\dfrac{b}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a} < x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$ f croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{b}{2a}\right[$	$f(x_1) > f(x_2)$ f décroissante sur $\left]-\dfrac{b}{2a}\,;\,+\infty\right[$

Si $a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$$\Delta = b^2 - 4ac, f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Si $a > 0$

$x_1 < x_2 < -\frac{b}{2a}$	$-\frac{b}{2a} < x_1 < x_2$
$x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a} < 0$ $\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ $a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ $a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$	$0 < x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a}$ $\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ $a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ $a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 \frac{\Delta}{4a} < a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$
$f(x_1) > f(x_2)$ f décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{b}{2a}\right[$	$f(x_1) < f(x_2)$ f croissante sur $\left]-\frac{b}{2a}\,;\,+\infty\right[$

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$$\Delta = b^2 - 4ac,\ f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Si $a > 0$

$x_1 < x_2 < -\dfrac{b}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a} < x_1 < x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$ f décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{b}{2a}\right[$	$f(x_1) < f(x_2)$ f croissante sur $\left]-\dfrac{b}{2a}\ ;\ +\infty\right[$

Si $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6,\ f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0,5\,(x-2)^2 - 3$$

$a = 0,5,\ a > 0$

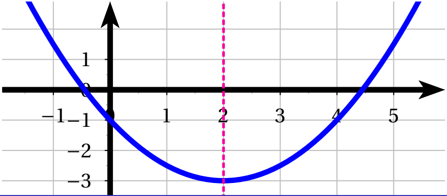
x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

Table de valeurs :

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1,5	-1	$-2,5$	-3

x	3	4	5
$f(x)$	2,5	-1	1,5

La droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de



Variations, exemple et représentation graphique

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 6$, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = -0,5\,(x-2)^2 + 3$

$a = -0,5$, $a < 0$

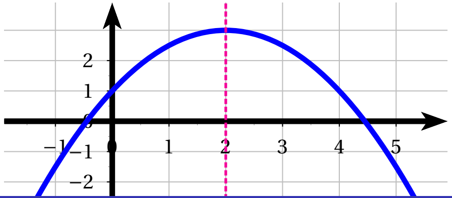
x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$\nearrow$	3	$\searrow$

Table de valeurs :

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$-1,5$	1	$2,5$	3

x	3	4	5
$f(x)$	$2,5$	1	$-1,5$

La droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de



Représentation graphique

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta = b^2 - 4ac$, $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

Dans un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$, la fonction polynôme du second degré f est représentée par une **parabole** d'équation $y = f(x)$ et la parabole admet la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ comme axe de symétrie et $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$ est un extremum de f.

Astuce !

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$ax^2 + bx + c = c \Longleftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x(ax + b) = 0$

Les deux points ont pour abscisses 0 et $\dfrac{-b}{a}$. L'abscisse du milieu est $-\dfrac{b}{2a}$.

La forme canonique de f devient $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

Et on en déduit les variations de la courbe de la fonction f suivant le signe de a

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 1$.

$-0,5x^2 + 2x + 1 = 1 \iff -0,5x^2 + 2x = 0 \iff x(-0,5x + 2) = 0$

Les deux points ont pour abscisses 0 et $\dfrac{-2}{-0,5} = 4$. L'abscisse du milieu est $\dfrac{4}{2} = 2$.

La forme canonique de f devient

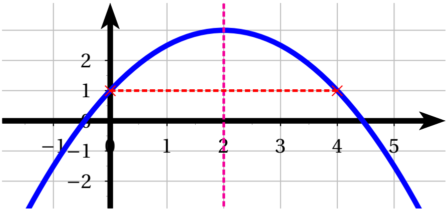
$f(x) = -0,5\,(x-2)^2 + f(2) = -0,5\,(x-2)^2 + 3$

Table de valeurs :

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$-1,5$	1	2,5	3

x	3	4	5
$f(x)$	2,5	1	$-1,5$

La droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.



Astuce ! Exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 1$.

$-0,5x^2 + 2x + 1 = 1 \iff -0,5x^2 + 2x = 0 \iff x(-0,5x + 2) = 0$

Les deux points ont pour abscisses 0 et $\dfrac{-2}{-0,5} = 4$. L'abscisse du milieu est $\dfrac{4}{2} = 2$.

La forme canonique de f devient
$f(x) = -0,5\,(x-2)^2 + f(2) = -0,5\,(x-2)^2 + 3$

$f(0) = 1$; $f(2) = 3$ et $f(4) = 1$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
f		1	3	1	

FIN