Fonction polynôme du second degré
Équation et signe

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Rappels

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta = b^2 - 4ac$, la **forme canonique** de f est :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Cas du discriminant strictement négatif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \; ; \; f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$\Delta < 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geqslant -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ est du signe de a et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↗	$-\frac{\Delta}{4a} < 0$	↘
$f(x)$		$-$	

Cas du discriminant strictement négatif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \; ; \; f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$\Delta < 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geqslant -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ est du signe de a et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↘	$-\frac{\Delta}{4a} > 0$	↗
$f(x)$		$+$	

Cas du discriminant strictement négatif, exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$.

$-\dfrac{b}{2a} = 1$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times (-2) \times (-5) = -24 < 0$.

$$f(x) = -2(x-1)^2 - 3\ ;\ f(x) = -2\left[(x-1)^2 + \frac{3}{2}\right]$$

$\Delta < 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 + \dfrac{3}{2} \geqslant \dfrac{3}{2} > 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ est du signe de $a = -2$ et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

$a < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	-3	$\searrow$	
$f(x)$			$-$		

Cas du discriminant nul

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta = 0$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$\Delta = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ est du signe de a et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x = -\frac{b}{2a}$.

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↗	0	↘
$f(x)$	$-$	0	$-$

Cas du discriminant nul

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta = 0$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$\Delta = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ est du signe de a et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$.

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Cas du discriminant nul, exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$.

$-\dfrac{b}{2a} = 1$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times (-2) \times (-2) = 0$.

$$f(x) = -2\,(x-1)^2$$

$\Delta = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geqslant 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ est du signe de $a = -2$ et l'équation $f(x) = 0$ admet $x = 1$ pour solution.

$a < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \; ; \; f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$\Delta > 0$: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Cas du discriminant strictement positif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta > 0$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Supposons $x_1 < x_2$

$a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Cas du discriminant strictement positif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta > 0$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(x-x_1)(x-x_2)\ ;\ f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Supposons $x_1 < x_2$

$a < 0$

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{b}{2a}$		x_2		$+\infty$
f		↗	0	↗	$-\frac{\Delta}{4a} > 0$	↘	0	↘	
$f(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta > 0$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ ; \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Supposons $x_1 < x_2$

$a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cas du discriminant strictement positif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta > 0$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)\ ;\ f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Supposons $x_1 < x_2$

$a > 0$

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{b}{2a}$		x_2		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a} < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

Cas du discriminant strictement positif, exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$.

$-\dfrac{b}{2a} = 1,5$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times (-2) \times (-4) = 4 > 0$;

$x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{4}}{2 \times (-2)} = 2$; $x_2 = \dfrac{-6+\sqrt{4}}{2 \times (-2)} = 1$.

$f(x) = -2(x-1,5)^2 + 0,5$; $f(x) = -2\left[(x-1,5)^2 - 0,25\right]$

$f(x) = -2(x-1,5-0,5)(x-1,5+0,5) = -2(x-1)(x-2)$

$\Delta > 0$: L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : 1 ou 2 et $a < 0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Cas du discriminant strictement positif, exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$.

$-\dfrac{b}{2a} = 1,5$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times (-2) \times (-4) = 4 > 0$;

$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{4}}{2 \times (-2)} = 2$; $x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{4}}{2 \times (-2)} = 1$.

$f(x) = -2\,(x - 1,5)^2 + 0,5$

$f(x) = -2(x-1)(x-2)$

$\Delta > 0$: L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : 1 ou 2 et $a < 0$

x	$-\infty$		1		1.5		2		$+\infty$
f		↗	0	↗	0.5	↘	0	↘	
$f(x)$		−	0		+		0	−	

Astuce ! Exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$.

$-2x^2 + 4x - 5 = -5 \iff -2x^2 + 4x = 0 \iff x(-2x + 4) = 0$

Deux points symétriques ont pour abscisses 0 et $\dfrac{-4}{-2} = 2$. L'abscisse du milieu est $\dfrac{2}{2} = 1$.

La forme canonique de f devient $f(x) = -2\,(x-1)^2 + f(1) = -2\,(x-1)^2 - 3$

$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geqslant 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, -2\,(x-1)^2 \leqslant 0$ et $-2\,(x-1)^2 - 3 \leqslant -3 < 0$.

$f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle. $a < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	-3	$\searrow$	
$f(x)$			$-$		

Astuce ! Exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$.

$-2x^2 + 4x - 2 = -2 \iff -2x^2 + 4x = 0 \iff x(-2x + 4) = 0$

Deux points symétriques ont pour abscisses 0 et $\dfrac{-4}{-2} = 2$. L'abscisse du milieu est $\dfrac{2}{2} = 1$.

La forme canonique de f devient $f(x) = -2\,(x-1)^2 + f(1) = -2\,(x-1)^2$

$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geqslant 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, -2\,(x-1)^2 \leqslant 0$.

$f(x) = 0$ admet une solution $x = 1$. $a < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Astuce ! Exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$.

$-2x^2 + 6x - 4 = -4 \iff -2x^2 + 6x = 0 \iff x(-2x+6) = 0$

Deux points symétriques ont pour abscisses 0 et $\dfrac{-6}{-2} = 3$. L'abscisse du milieu est $\dfrac{3}{2} = 1,5$.

La forme canonique de f devient

$f(x) = -2\,(x - 1,5)^2 + f(1,5) = -2\,(x - 1,5)^2 + 0,5$

$f(x) = -2\left[(x - 1,5)^2 - 0,25\right] = -2(x-1,5-0,5)(x-1,5+0,5) = -2(x-2)(x-1)$

$f(x) = 0 \iff -2(x-2)(x-1) \iff x = 1$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Astuce ! Exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -2x^2 + 6x - 4$.

$-2x^2 + 6x - 4 = -4 \iff -2x^2 + 6x = 0 \iff x(-2x+6) = 0$
Deux points symétriques ont pour abscisses 0 et $\dfrac{-6}{-2} = 3$. L'abscisse du milieu est $\dfrac{3}{2} = 1,5$.

La forme canonique de f devient
$f(x) = -2\,(x-1,5)^2 + f(1,5) = -2\,(x-1,5)^2 + 0,5$
$f(x) = -2\left[(x-1,5)^2 - 0,25\right] = -2(x-1,5-0,5)(x-1,5+0,5) = -2(x-2)(x-1)$
$f(x) = 0 \iff -2(x-2)(x-1) \iff x = 1 \text{ ou } x = 2$

x	$-\infty$		1		1.5		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	0.5	$\searrow$	0	$\searrow$	
$f(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	

FIN