

Fonction polynôme du second degré

Équation et signe

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta = b^2 - 4ac$, la **forme canonique** de f est :

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Cas du discriminant strictement négatif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}; f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$\Delta < 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} f(x)$ est du signe de a et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f		$-\frac{\Delta}{4a} < 0$	
$f(x)$		-	

Cas du discriminant strictement négatif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}; f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$\Delta < 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} f(x)$ est du signe de a et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f		$-\frac{\Delta}{4a} > 0$	
$f(x)$		$+$	

Cas du discriminant strictement négatif, exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 5.$$

$$-\frac{b}{2a} = 1 \text{ et } \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times (-2) \times (-5) = -24 < 0.$$

$$f(x) = -2(x-1)^2 - 3; f(x) = -2 \left[(x-1)^2 + \frac{3}{2} \right]$$

$\Delta < 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} > 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} f(x)$ est du signe de $a = -2$ et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

$$a < 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f		-3	
$f(x)$		$-$	

Cas du discriminant nul

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

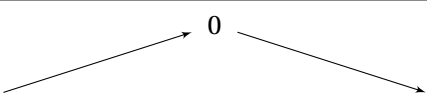
$\Delta = 0$:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

$\Delta = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} f(x)$ est du signe de a et

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x = -\frac{b}{2a}$.

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			
$f(x)$	-	0	-

Cas du discriminant nul

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

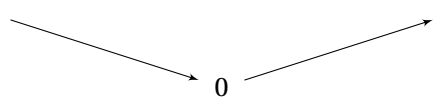
$\Delta = 0$:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

$\Delta = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} f(x)$ est du signe de a et

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x = -\frac{b}{2a}$.

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f			
$f(x)$	+	0	+

Cas du discriminant nul, exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par

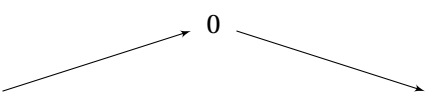
$$f(x) = -2x^2 + 4x - 2.$$

$$-\frac{b}{2a} = 1 \text{ et } \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times (-2) \times (-2) = 0.$$

$$f(x) = -2(x-1)^2$$

$\Delta = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} f(x)$ est du signe de $a = -2$ et l'équation $f(x) = 0$ admet $x = 1$ pour solution.

$a < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f			
$f(x)$	-	0	-

Cas du discriminant strictement positif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}; f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$\Delta > 0 : A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$f(x) = 0 \iff x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$f(x) = 0 \iff x = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Cas du discriminant strictement positif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta > 0$:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Supposons $x_1 < x_2$

$a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	+
$f(x)$	-	0	+	-

Cas du discriminant strictement positif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta > 0$:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a(x - x_1)(x - x_2); f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Supposons $x_1 < x_2$

$a < 0$

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{b}{2a}$	x_2	$+\infty$
f					
$f(x)$	-	0	+	0	-

Cas du discriminant strictement positif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

$\Delta > 0$:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Supposons $x_1 < x_2$

$a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	+
$f(x)$	+	0	-	+

Cas du discriminant strictement positif

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c deux réels.

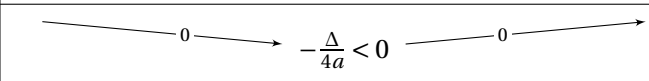
$\Delta > 0$:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a(x - x_1)(x - x_2); f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Supposons $x_1 < x_2$

$a > 0$

x	$-\infty$	x_1	$-\frac{b}{2a}$	x_2	$+\infty$
f					
$f(x)$	+	0	-	0	+

Cas du discriminant strictement positif, exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par
 $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$.

$$-\frac{b}{2a} = 1,5 \text{ et } \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times (-2) \times (-4) = 4 > 0 ;$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{4}}{2 \times (-2)} = 2 ; x_2 = \frac{-6 + \sqrt{4}}{2 \times (-2)} = 1.$$

$$f(x) = -2(x - 1,5)^2 + 0,5 ; f(x) = -2[(x - 1,5)^2 - 0,25]$$

$$f(x) = -2(x - 1,5 - 0,5)(x - 1,5 + 0,5) = -2(x - 1)(x - 2)$$

$\Delta > 0$: L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : 1 ou 2 et $a < 0$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
$(x - 1)(x - 2)$	+	0	-	+
$f(x)$	-	0	+	-

Cas du discriminant strictement positif, exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -2x^2 + 6x - 4.$$

$$-\frac{b}{2a} = 1,5 \text{ et } \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times (-2) \times (-4) = 4 > 0;$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{4}}{2 \times (-2)} = 2; \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{4}}{2 \times (-2)} = 1.$$

$$f(x) = -2(x - 1,5)^2 + 0,5$$

$$f(x) = -2(x - 1)(x - 2)$$

$\Delta > 0$: L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : 1 ou 2 et $a < 0$

x	$-\infty$	1	1.5	2	$+\infty$
f					
$f(x)$	-	0	+	0	-

Astuce ! Exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 5.$$

$$-2x^2 + 4x - 5 = -5 \iff -2x^2 + 4x = 0 \iff x(-2x + 4) = 0$$

Deux points symétriques ont pour abscisses 0 et $\frac{-4}{-2} = 2$. L'abscisse du milieu est $\frac{2}{2} = 1$.

La forme canonique de f devient $f(x) = -2(x-1)^2 + f(1) = -2(x-1)^2 - 3$

$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, -2(x-1)^2 \leq 0$ et $-2(x-1)^2 - 3 \leq -3 < 0$.

$f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle. $a < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f		-3	
$f(x)$		-	

Astuce ! Exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 2.$$

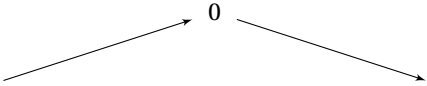
$$-2x^2 + 4x - 2 = -2 \iff -2x^2 + 4x = 0 \iff x(-2x + 4) = 0$$

Deux points symétriques ont pour abscisses 0 et $\frac{-4}{-2} = 2$. L'abscisse du milieu est $\frac{2}{2} = 1$.

La forme canonique de f devient $f(x) = -2(x-1)^2 + f(1) = -2(x-1)^2$

$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, -2(x-1)^2 \leq 0$.

$f(x) = 0$ admet une solution $x = 1$. $a < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f			
$f(x)$	-	0	-

Astuce ! Exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -2x^2 + 6x - 4.$$

$$-2x^2 + 6x - 4 = -4 \iff -2x^2 + 6x = 0 \iff x(-2x + 6) = 0$$

Deux points symétriques ont pour abscisses 0 et $\frac{-6}{-2} = 3$. L'abscisse du

milieu est $\frac{3}{2} = 1,5$.

La forme canonique de f devient

$$f(x) = -2(x - 1,5)^2 + f(1,5) = -2(x - 1,5)^2 + 0,5$$

$$f(x) = -2[(x - 1,5)^2 - 0,25] = -2(x - 1,5 - 0,5)(x - 1,5 + 0,5) = -2(x - 2)(x - 1)$$

$$f(x) = 0 \iff -2(x - 2)(x - 1) \iff x = 1 \text{ ou } x = 2$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x - 1$	-	0	+	+	
$x - 2$	-	-	0	+	
$(x - 1)(x - 2)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-

Astuce ! Exemple

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -2x^2 + 6x - 4.$$

$$-2x^2 + 6x - 4 = -4 \iff -2x^2 + 6x = 0 \iff x(-2x + 6) = 0$$

Deux points symétriques ont pour abscisses 0 et $\frac{-6}{-2} = 3$. L'abscisse du milieu est $\frac{3}{2} = 1,5$.

La forme canonique de f devient

$$f(x) = -2(x - 1,5)^2 + f(1,5) = -2(x - 1,5)^2 + 0,5$$

$$f(x) = -2[(x - 1,5)^2 - 0,25] = -2(x - 1,5 - 0,5)(x - 1,5 + 0,5) = -2(x - 2)(x - 1)$$

$$f(x) = 0 \iff -2(x - 2)(x - 1) \iff x = 1 \text{ ou } x = 2$$

x	$-\infty$	1	1.5	2	$+\infty$
f					
$f(x)$	-	0	+	0	-

FIN