Équations, fonctions polynômes du second degré

Table des Matières

Équations, fonctions polynômes du second degré

I. Équations du second degré

I. A. Introduction historique

Abou Abdallah Mohammad Ibn Moussa Al-Khawārizmi (780-850 apr. J.-C.Ouzbékistan) a écrit une ouvrage majeur <u>*Al Kitāb al mokhtasar fi hisāb al jabr wa-l-moqābala*</u> traitant de l'algèbre.

Al jabr est à l'origine du mot algèbre, Al-Khawārizmi a utilisé ce terme pour ajouter aux deux membres d'une équation le même terme afin de n'avoir que des termes à ajouter, voire que des quantités entières.
Par exemple :

$$\begin{aligned}
2x^2-5x+\frac{1}{2} &= x^2-\frac{5}{3}x\\
12x^2-30x+3 &= 6x^2-10x\\
12x^2-30x+3+30x &= 6x^2-10x+30x\\
12x^2+3 &= 6x^2+20x
\end{aligned}$$

Al moqābala signifie la comparaison, il s'agit de regrouper les termes de même nature.
En poursuivant l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}
12x^2+3 &= 6x^2+20x\\
6x^2+3 &= 20x
\end{aligned}$$

Dans son ouvrage, Al-Khawārizmi va donner un **algorithme** de résolution d'équation du second degré.

Il démontre que toute équation du second degré peut se ramener à une des six formes suivantes :

Types d'équation :	Selon Al-Khawārizmi	traduction mathématique moderne
Simples	Carrés égaux aux racines	$ax^2 = bx$
	Carré égaux à un nombre	$ax^2 = c$
	Racines égales à un nombre	$bx = c$
composées	Carrés et racines égaux à un nombre	$ax^2 + bx = c$
	Carrés et nombre égaux aux racines	$ax^2 + c = bx$
	Carrés égaux aux racines et au nombre	$ax^2 = bx + c$

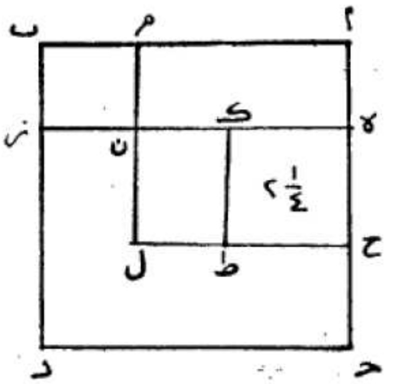
À cette époque, les écrits scientifiques étaient rédigés en vers et les quantités x^2 (Al-māl), x (al-jidhr) et la constante ('adad) était respectivement le bien au sens de fortune, la racine et le nombre. Ainsi ax^2 sont des biens (il y en a plusieurs), bx des racines (il y en a plusieurs) et c est un nombre.

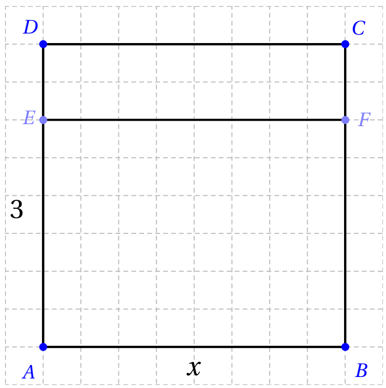
☞**Activité 1**

On souhaite résoudre l'équation [1 m$\bar{a}$l égal à 3 racines et 4 'adad] :

$$x^2 = 3x + 4$$

Al-Khawārizmi propose la figure suivante, nous allons la reconstruire à droite :





$ABCD$ est un carré de côté x, le rectangle $CDEF$ d'aire 4 et le rectangle de côté x et 3 partagent le carré.

1. Construire le point G milieu du segment $[BF]$ puis le carré $FHIG$ à l'intérieur du carré $ABCD$, puis le carré $CJKG$ à l'intérieur du carré $ABCD$. Le segment $[JK]$ coupe le segment $[EF]$ en L.
2. Calculer l'aire du carré $FHIJ$.
3. Démontrer que l'aire du rectangle $JDEL$ est égale à l'aire du rectangle $HLJI$.
4. En déduire que l'aire du carré $CJKG$ est égale à $4 + \dfrac{9}{4}$ et elle est aussi égale à $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$
5. Résoudre $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 4$.

Finalement on a obtenu les étapes algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x + 4 \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \end{aligned}$$

Aujourd'hui on présente (peut-être à tort) les calculs ainsi :

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x + 4 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

I. B. Résolution d'une équation du second degré

☞**Activité 2**

Soit une équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

a est un réel non nul, b et c sont deux nombres réels.

1. Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a} \tag{2}$$

équivalente à l'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \tag{3}$$

équivalente à l'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{4}$$

On note Δ le nombre réel $b^2 - 4ac$.

2. En déduire, par disjonction de 3 cas du nombre Δ, les solutions réelles de l'équation (1).

Définition

Soit une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

a est un réel non nul, b et c sont deux réels.
L'équation (1) est équivalente à l'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{2}$$

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation (1).

Théorème

Soit une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

a est un réel non nul, b et c sont deux réels.
$\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation (1) n'a pas de solution,
- si $\Delta = 0$ alors l'équation (1) admet une solution réelle $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$,
- si $\Delta > 0$ alors l'équation (1) admet deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

☞**Démonstration 1**

faite dans l'activité

Définition

Soit une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

a est un réel non nul, b et c sont deux réels.
L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée polynôme du second degré et les solutions éventuelles de l'équation (1) sont appelées **racine(s)** du polynôme.

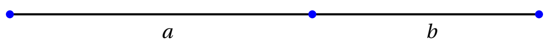
Exercice 1

Déterminer les solutions des équations suivantes :

1. $-2x^2 + 3x = 1$
2. $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = 0$
3. $x^2 = -x + 2$
4. $\frac{-x}{x+1} = 2x + 1$

Exercice 2

Euclide (-300 av. J.-C.) dit que la proportion définie par a et b est dite *d'extrême et moyenne raison* lorsque a est à b ce que $a + b$ est à a, autrement dit lorsque $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.



On pose $\frac{a}{b} = x$, $a > 0$ et $b > 0$.

1. Montrer que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff x^2 = x + 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$, en déduire la valeur Φ du rapport $\frac{a}{b}$.
   Le nombre Φ est appelé nombre d'Or ou divine proportion, il fait l'objet d'un chapitre complet du livre *De divina proportione* écrit par Luca Pacioli (1 445-1 517 Italien) et illustré par Léonard de Vinci (1 452-1 519 italien) publié en 1 509.

Propriété

Soit une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

a est un réel non nul, b et c sont deux réels et telle que son discriminant Δ soit positif, on note x_1 et x_2 les solutions de l'équation avec éventuellement $x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$.

- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
- $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Démonstration 2

laissée en exercice

Exercice 3

Trouver un rectangle dont le périmètre vaut 10,9 et l'aire vaut 7,15.

II. Fonctions polynômes du second degré

II. A. Définition et propriété

Définition

On appelle fonction polynôme du second degré f, une fonction qui au nombre réel x associe le nombre réel ax^2+bx+c, où a est un nombre réel non nul et b et c deux nombres réels.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=ax^2+bx+c \end{array}$$

.

Dans la suite du cours a, b et c seront trois réels et a est non nul.

Exercice 4

Dire si les expressions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré, dans le cas d'une réponse affirmative, préciser les valeurs de a, b et c :

1. $f_1 : x \mapsto f_1(x) = 2x^2+3x-1$;
2. $f_2 : x \mapsto f_2(x) = -x^2+6$;
3. $f_3 : x \mapsto f_3(x) = x^2-x$;
4. $f_4 : x \mapsto f_4(x) = x(x+5)$;
5. $f_5 : x \mapsto f_5(x) = (5x+1)(-2x+7)$;
6. $f_6 : x \mapsto f_6(x) = (3x-5)^2-9x^2$;
7. $f_7 : x \mapsto f_7(x) = 4(x+2)(x-4)$;
8. $f_8 : x \mapsto f_8(x) = 2(x+9)^2-5$.

II. B. Représentation graphique

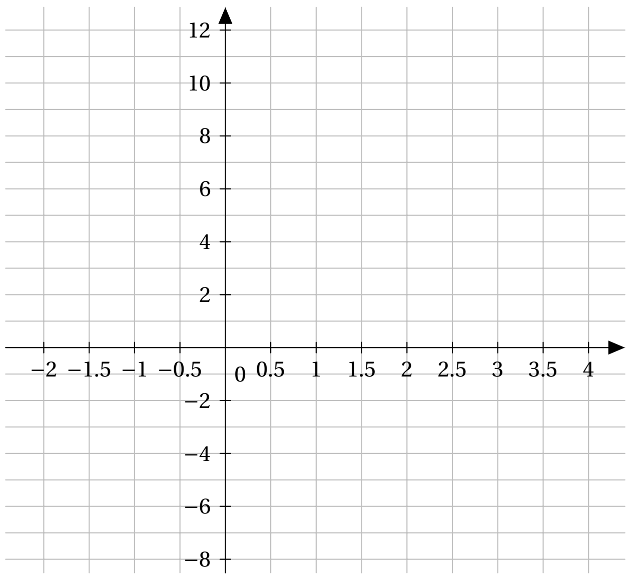
Activité 3

Soit une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=2x^2-4x-5$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, $f(x) = 2(x-1)^2-7$. En déduire $f(1)$.
2. En utilisant l'expression de $f(x)$ que vous souhaitez, complétez le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x)$							
x	1.5	2	2.5	3	3.5	4	......
$f(x)$							......

3. Représenter la courbe de la fonction f sur dans le repère orthogonal suivant :



4. On admet que la courbe de la fonction f (une parabole d'équation $y=2x^2-4x-5$) admet un axe de symétrie, donner l'équation de cet axe et le tracer sur le graphique précédent.

Pour la suite du cours, on considère un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan.

Propriété

Soit une fonction polynôme du second degré f, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a non nul).
$f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-k)^2 + h$, avec $k = \dfrac{-b}{2a}$ et $h = -\dfrac{\Delta}{4a}$.
La forme d'expression $f(x) = a(x-k)^2 + h$ est appelée **forme canonique** de la fonction du second degré.

Démonstration 3

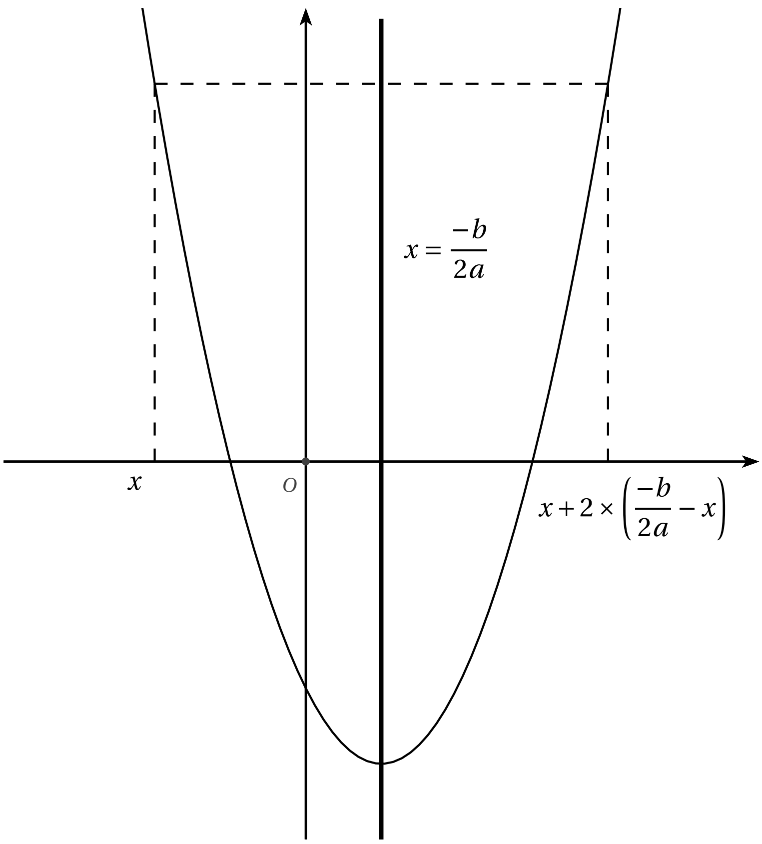
Laissée en exercice

Propriété

Soit une fonction polynôme du second degré f, telle que pour tout nombre réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a non nul). La représentation graphique de la fonction f est une parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$, son axe de symétrie a pour équation $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Démonstration 4

Soit l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ d'une fonction f polynôme du second degré. Montrer que pour tout nombre réel x, $f(x) = f\left(x + 2\times\left(-\dfrac{b}{2a} - x\right)\right)$. On admet que la courbe $\mathscr{P}$ est une parabole.



Exemple

On reprend la fonction f de l'activité définie par $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$, l'axe de symétrie a pour équation
$x = \dfrac{-(-4)}{2\times 2}$ soit $x = 1$.

☞Exercice 5

Soit une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a non nul), calculer $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ en utilisant la forme canonique.

☞Exercice 6

1. Développer et réduire les expressions suivantes, identifier les nombres k, h, a, b et c, donner l'équation de l'axe de symétrie des courbes associées. :

   (a) $f_1(x) = -4(x+2)^2 - 1$;

   (b) $f_2(x) = 3(x-8)^2 + 5$.

2. Soit la fonction f telle que pour tout nombre x, $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.
   Montrer que pour tout nombre x, $f(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}$.

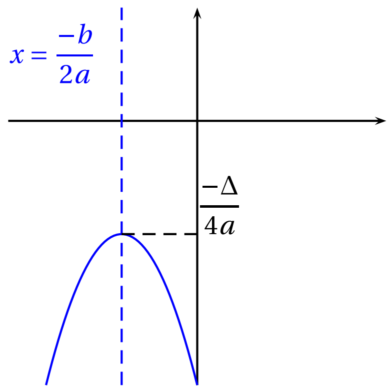
II. C. Étude des variations d'une fonction du second degré

✒ Propriété

Soit f une fonction polynôme du second degré telle que $f(x) = a(x-k)^2 + h$ avec $k = \dfrac{-b}{2a}$ et $h = \dfrac{-\Delta}{4a}$.
On donne les tableaux de variations de f suivant le signe de a :

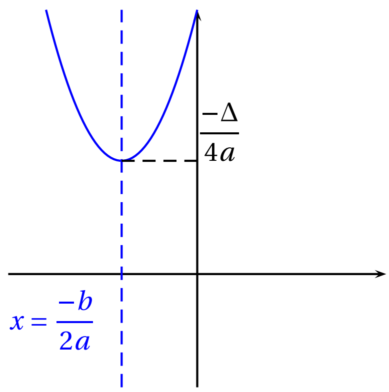
- $a < 0$:

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$	



- $a > 0$:

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	



animation

☞Démonstration 5

Soit s et t deux réels tels que $s < t$, comparer $f(s)$ et $f(t)$ à partir de la forme canonique.

Remarque

Avec les notations précédentes, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors $f(x) = a\left(x - \dfrac{-b}{2a}\right) + f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.

Pour obtenir la forme canonique, il suffit connaître le nombre réel $\dfrac{-b}{2a}$.

Exercice 7

Étudier les variations des fonctions polynômes f_1, f_2, f_3 et f_4 et vérifier les variations sur votre calculatrice avec une fenêtre graphique adaptée (indiquer les paramètres de la fenêtre utilisée) :

1. $f_1(x) = 3(x-5)^2 - 7$;
2. $f_2(x) = -(x+4)^2 + 3$;
3. $f_3(x) = x^2 - 5x$;
4. $f_4(x) = x^2 - 5x + 4$.

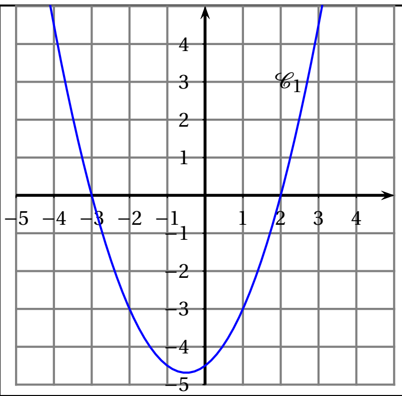
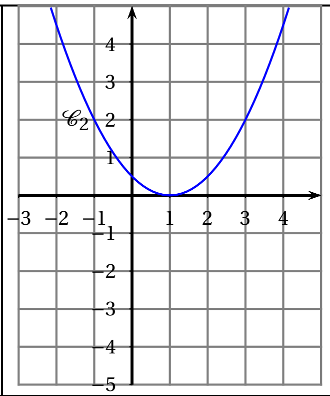
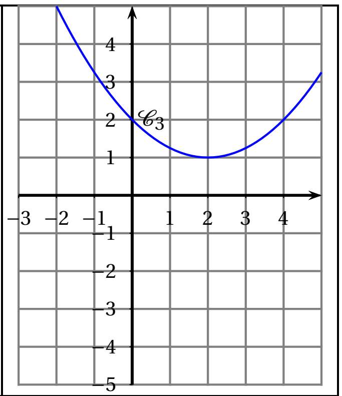
II. D. Signe d'une fonction du second degré

Activité 4

Soit l'expression canonique du second degré : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

1. Déterminer le signe de $f(x)$ par disjonction de 3 cas de Δ en distinguant le signe de a.
2. Illustration des trois cas

   (a) Dans les trois cas suivants, on choisit $a > 0$, associer à chaque graphique le signe du discriminant et le nombre de solution(s) à l'équation $f(x) = 0$:

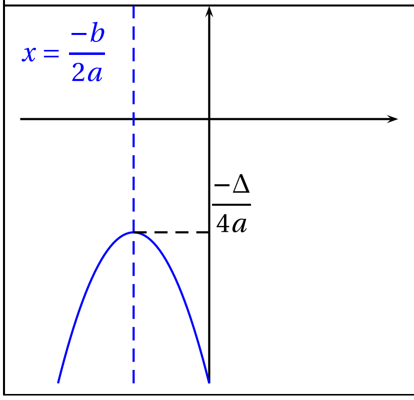
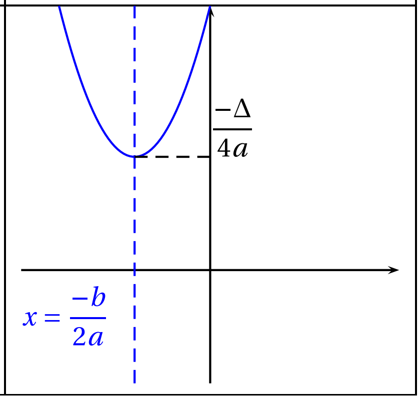
			
Signe de Δ			
Nombre de solution $f(x) = 0$			

   (b) Retrouver les expressions associées à chaque courbe.

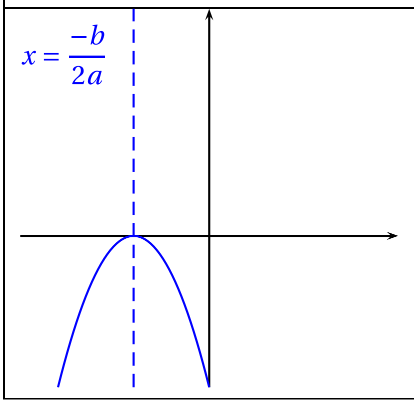
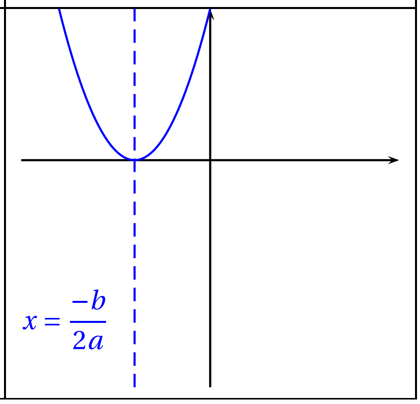
Propriété

Soit l'expression du second degré : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$; avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta < 0$ alors :
  - la ***factorisation*** de $f(x)$ est impossible
  - l'***équation*** $f(x) = 0$ n'admet aucune solution (réelle)
  - le ***signe de*** $f(x)$ est celui de a.

$a < 0$	$a > 0$
	

- si $\Delta = 0$ alors :
  - la ***factorisation*** est $f(x) = a\left(x - \dfrac{-b}{2a}\right)^2$
  - l'***équation*** $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
  - le ***signe de*** $f(x)$ est celui de a.

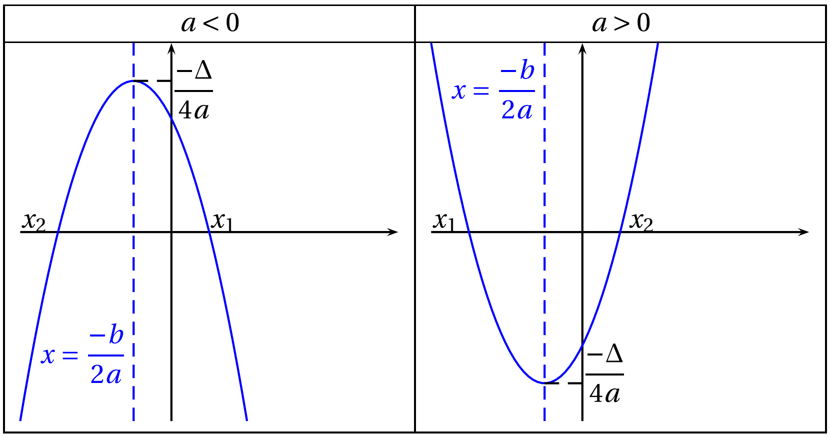
$a < 0$	$a > 0$
	

Propriété

(suite de la propriété)

- si $\Delta > 0$ alors :
  - la ***factorisation*** est de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
  - l'***équation*** $f(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
  - le ***signe de*** $f(x)$ est :

x	$-\infty$		x_1 (ou x_2)		x_1 ou (x_2)		$+\infty$
$f(x)$		$signe$(a)	0	$signe$(-a)	0	$signe$(a)	



☞Démonstration 6

Faite dans l'activité et dans le premier paragraphe.

☞Exercice 8

Pour chacune des expressions, trouver la factorisation puis le signe :

1. $f_1(x) = 3x^2 - 2x - 1$
2. $f_2(x) = -x^2 + 5x + 6$
3. $f_3(x) = 2x^2 - 3x + 7$
4. $f_4(x) = 0,5x^2 + 2x + 2$