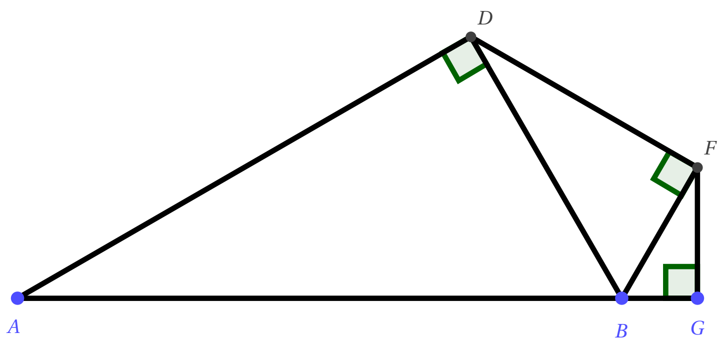
✧ Parcours différenciés : Trigonométrie ✧

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

I. Trigonométrie dans un triangle rectangle

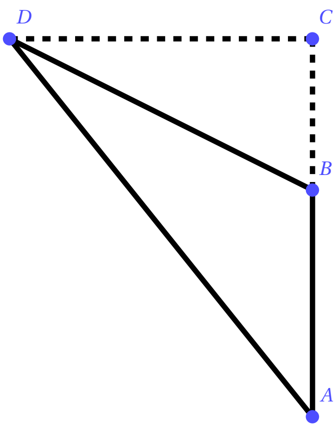
☞Exercice 1 ✧

On considère la figure suivante :
$AB = 8$ et $\left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \left(\overrightarrow{BF}\,;\,\overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)$.
Déterminer l'aire du quadrilatère $AGFD$.



☞Exercice 2 ✧

On considère la figure suivante :
$AB = 3$, $BC = 2$ et $DC = 4$.
Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)$



II. Angle sur un cercle trigonométrique

☞**Exercice 3** ✧

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.
Placer les points M_i du plan tels que :

1. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_1}\right)=\dfrac{7\pi}{3}$
2. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_2}\right)=\dfrac{-11\pi}{6}$
3. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_3}\right)=\dfrac{5\pi}{2}$
4. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_4}\right)=91\pi$
5. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_5}\right)=\dfrac{-15\pi}{4}$
6. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_6}\right)=\dfrac{76\pi}{3}$
7. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_7}\right)=\dfrac{-803\pi}{6}$
8. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_8}\right)=\dfrac{111\pi}{2}$

☞**Exercice 4** ✧✧

Reprendre les angles de l'exercice précédent et donner les mesures principales de chacun.

☞**Exercice 5** ✧✧

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.
Placer les points M_i du plan tels que :

1. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_1}\right)=\dfrac{\pi}{3}$
2. $\left(\overrightarrow{OM_1}\,;\,\overrightarrow{OM_2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$
3. $\left(\overrightarrow{OM_2}\,;\,\overrightarrow{OM_3}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$
4. $\left(\overrightarrow{OM_3}\,;\,\overrightarrow{OM_4}\right)=\pi$

☞**Exercice 6** ✧

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.
Représenter en :

1. rouge, tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ tels que $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)\in\left[0\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$
2. bleu, tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ tels que $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)\in\left[\dfrac{-5\pi}{6}\,;\,\dfrac{-\pi}{2}\right]$

☞**Exercice 7** ✧

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.
Placer un point M du cercle $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)=x$ avec $x\in\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Placer sur le cercle les points M_i tels que :

1. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_1}\right)=-x$
2. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_2}\right)=-x+\pi$
3. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_3}\right)=x+\pi$
4. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_4}\right)=x+\dfrac{\pi}{2}$

☞**Exercice 8** ✧

$\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.
Représenter en :

1. rouge, tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ tels que $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) \in \left[0\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$
2. bleu, tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ tels que $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) \in \left[\dfrac{-5\pi}{6}\,;\,\dfrac{-\pi}{2}\right]$

III. cosinus et sinus

☞**Exercice 9** ✧

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{array}$$

.

1. Montrer que f est de période 4π.
2. Montrer que f est impaire.
   On restreint l'intervalle d'étude de la fonction f à $[0\,;\,2\pi]$.
3. Calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f.
4. À partir du cercle trigonométrique, résoudre $f'(x) = 0$ puis $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.
5. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,2\pi]$ puis le tableau de variations de f sur $[-6\pi\,;\,2\pi]$
6. Vérifier la représentation graphique sur GeoGebra ou sur la calculatrice.

☞**Exercice 10** ✧

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0\,;\,2\pi & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos(x) \end{array}$$

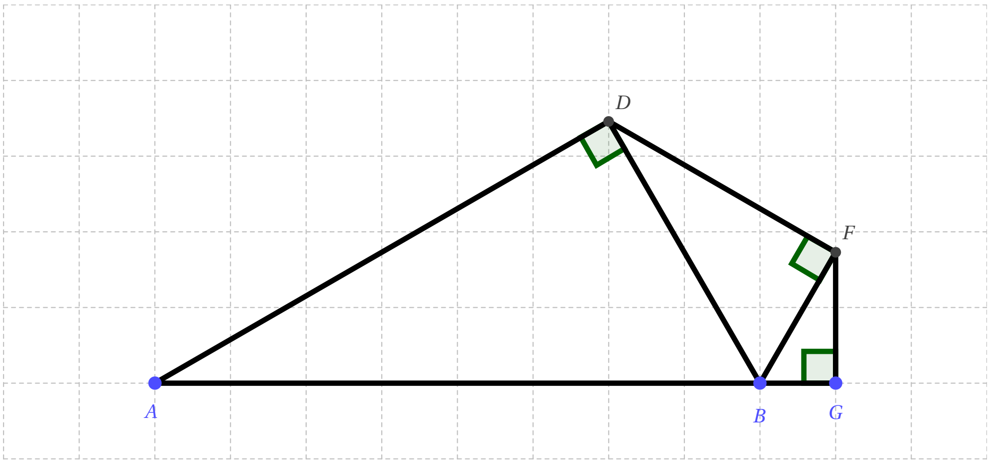
.

1. Calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f.
2. À partir du cercle trigonométrique, résoudre $f'(x) = 0$ puis $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,2\pi]$
4. Vérifier la représentation graphique sur GeoGebra ou sur la calculatrice.

Correction

Exercice 1

On considère la figure suivante :



$AB = 8$ et $\left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \left(\overrightarrow{BF}\,;\,\overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)$.

$\left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) + \left(\overrightarrow{BF}\,;\,\overrightarrow{BD}\right) + \left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BA}\right) = \pi$ (angle plat)

Comme $\left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \left(\overrightarrow{BF}\,;\,\overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}\right)$, on en déduit $3\left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \pi$ soit $\left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

$\cos\left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{BD}{AB} \iff BD = \cos\left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}\right) \times BA = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \times 8 = \dfrac{1}{2} \times 8 = 4$.

On peut déduire la hauteur h_1 issue de D du triangle ABD :

$\sin\left(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{h_1}{BD} \iff h_1 = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \times BD = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$.

Ainsi l'aire du triangle ABD est $\dfrac{8 \times 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$.

De la même manière, dans le triangle rectangle BFD on a : $\cos\left(\overrightarrow{BF}\,;\,\overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{BF}{BD} \iff BF = \cos\left(\overrightarrow{BF}\,;\,\overrightarrow{BD}\right) \times BD = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \times 4 = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$.

On peut déduire la hauteur h_2 issue de F du triangle BFD :

$\sin\left(\overrightarrow{BF}\,;\,\overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{h_2}{BF} \iff h_2 = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \times BF = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$.

Ainsi l'aire du triangle BFD est $\dfrac{4 \times \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

De la même manière, dans le triangle rectangle BGF on a : $\cos\left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \dfrac{BG}{BF} \iff BG = \cos\left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) \times BF = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \times 2 = \dfrac{1}{2} \times 2 = 1$.

On peut déduire la hauteur h_3 issue de G du triangle BGF :

$\sin\left(\overrightarrow{BG}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \dfrac{h_3}{BG} \iff h_3 = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \times BG = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

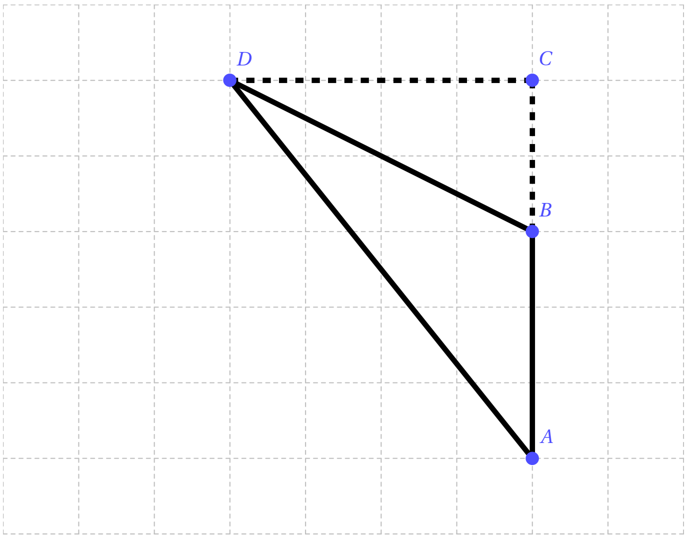
Ainsi l'aire du triangle BGF est $\dfrac{2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

L'aire du polygone $AGFD$ est donc $8\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{21\sqrt{3}}{2}$.

Remarque : une fois déterminé le côté DB du triangle rectangle ABD on peut utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer le dernier côté AD et en déduire l'aire du triangle et faire de même pour les deux autres triangles rectangles BFD et BGF.

☞**Exercice 2** ✧

On considère la figure suivante :



$AB = 3$, $BC = 2$ et $DC = 4$.
Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right)$

Dans le triangle rectangle DBC :

$\tan\left(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right) = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{1}{2}$.

Avec la calculatrice $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) \simeq 0,4636$ rad ou $26,57°$.

Dans le triangle rectangle DCA :

$\tan\left(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right) = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{5}{4}$.

Avec la calculatrice $\arctan\left(\dfrac{5}{4}\right) \simeq 0,8961$ rad ou $51,34°$.

Dans le triangle rectangle DCA :

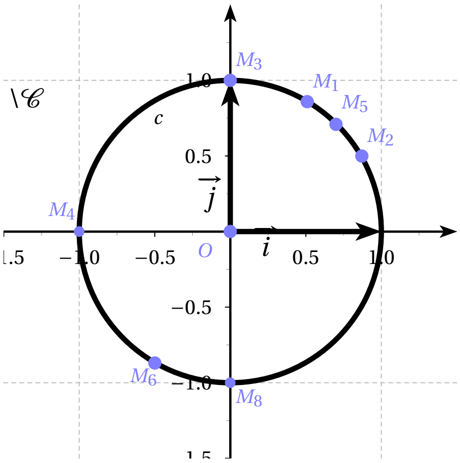
$\tan\left(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{4}{5}$.

Avec la calculatrice $\arctan\left(\dfrac{4}{5}\right) \simeq 0,6747$ rad ou $38,66°$.

$\left(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DB}\right) = \left(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right) - \left(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right) \simeq 0,8961 - 0,4636 = 0,4325$ rad ou $51,34° - 26,57° = 24,77°$.

La somme des angles du triangle fait π rad ou $180°$ ainsi $\left(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right) \simeq \pi - 0,6747 - 0,4325 \simeq 2.0344$ rad
ou $180 - 38,66 - 24,77 = 116,57°$

☞**Exercice 3** ✧



1. $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right) = \dfrac{7\pi}{3}$
   On peut placer $\dfrac{\pi}{3}$ et compter 7 fois cet angle.
   Pour la recherche d'une mesure principale (non obligatoire pour placer le point), on remarque que :
   $\dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{6\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$.
   $\dfrac{7\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$.
   $\dfrac{\pi}{3}$ est dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$, c'est la mesure principale de l'angle $\dfrac{7\pi}{3}$. Le point M_1 est associé à l'angle $\dfrac{\pi}{3}$ à un tour.

2. $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right) = \dfrac{-11\pi}{6}$
   On peut placer $\dfrac{-\pi}{6}$ et compter 11 fois cet angle.
   Pour la recherche d'une mesure principale (non obligatoire pour placer le point), on remarque que :
   $\dfrac{-11\pi}{6} = -\dfrac{12\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = -2\pi + \dfrac{\pi}{6}$.
   $\dfrac{-11\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{6}(2\pi)$.
   Le point M_2 est associé à l'angle $\dfrac{\pi}{6}$ à un tour.
   $\dfrac{-11\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{6}(2\pi)$.
   $\dfrac{\pi}{6}$ est dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$, c'est la mesure principale de l'angle $\dfrac{-11\pi}{6}$.

3. $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_3}\right) = \dfrac{5\pi}{2}$
   On peut placer $\dfrac{\pi}{2}$ et compter 5 fois cet angle.
   Pour la recherche d'une mesure principale (non obligatoire pour placer le point), on remarque que :
   $\dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{4\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 2\pi + \dfrac{\pi}{2}$.
   $\dfrac{5\pi}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$.
   Le point M_3 est associé à l'angle $\dfrac{\pi}{2}$ à un tour.
   $\dfrac{5\pi}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$.
   $\dfrac{\pi}{2}$ est dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$, c'est la mesure principale de l'angle $\dfrac{5\pi}{2}$.

4. $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_4}\right) = 91\pi$
   On peut placer π et compter 91 fois cet angle.
   Pour la recherche d'une mesure principale (non obligatoire pour placer le point), on remarque que :
   $91\pi = 2\pi \times 46 - \pi$.

$91\pi \equiv -\pi(2\pi)$.
Le point M_4 est associé à l'angle $-\pi$ à 46 tours.
$91\pi \equiv -\pi$.
$-\pi$ est dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi[$, c'est la mesure principale de l'angle 91π.

5. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_5}\right) = \dfrac{-15\pi}{4}$
On peut placer $\dfrac{-\pi}{4}$ et compter 15 fois cet angle.
Pour la recherche d'une mesure principale (non obligatoire pour placer le point), on remarque que :
$\dfrac{-15\pi}{4} = -\dfrac{8\pi}{4} \times 2 + \dfrac{\pi}{4} = -2\pi \times 2 + \dfrac{\pi}{4}$.
$\dfrac{-15\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{4}(2\pi)$.
Le point M_5 est associé à l'angle $\dfrac{\pi}{4}$ à 2 tours.
$\dfrac{-15\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{4}(2\pi)$.
$\dfrac{\pi}{4}$ est dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi[$, c'est la mesure principale de l'angle $\dfrac{-15\pi}{4}$.

6. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_6}\right) = \dfrac{76\pi}{3}$
On peut placer $\dfrac{\pi}{3}$ et compter 76 fois cet angle.
Pour la recherche d'une mesure principale (non obligatoire pour placer le point), on remarque que :
$\dfrac{76\pi}{3} = \dfrac{6\pi}{3} \times 12 + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{6\pi}{3} \times 13 - \dfrac{2\pi}{3} = 2\pi \times 13 - \dfrac{2\pi}{3}$.
$\dfrac{76\pi}{3} \equiv \dfrac{4\pi}{3}(2\pi)$ ou $\dfrac{76\pi}{3} \equiv \dfrac{-2\pi}{3}(2\pi)$ Le point M_6 est associé à l'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$ à 13 tours $\left(\text{ou } \dfrac{4\pi}{3} \text{ à 12 tours}\right)$.
$\dfrac{76\pi}{3} \equiv \dfrac{-2\pi}{3}(2\pi)$.
$\dfrac{-2\pi}{3}$ est dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi[$, c'est la mesure principale de l'angle $\dfrac{76\pi}{3}$.

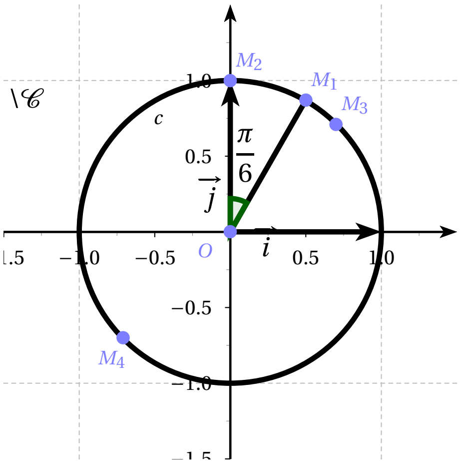
7. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_7}\right) = \dfrac{-803\pi}{6}$
On peut placer $\dfrac{-\pi}{6}$ et compter 803 fois cet angle, mais ça devient déraisonnable !
Pour la recherche d'une mesure principale (non obligatoire pour placer le point), on remarque que :
$\dfrac{-803\pi}{6} = -\dfrac{12\pi}{6} \times 66 - \dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{12\pi}{6} \times 67 + \dfrac{\pi}{6} = -2\pi \times 67 + \dfrac{\pi}{6}$.
$\dfrac{-803\pi}{6} \equiv \dfrac{-11\pi}{6}(2\pi)$ ou $\dfrac{-803\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{6}(2\pi)$ Le point M_7 est associé à l'angle $\dfrac{\pi}{6}$ à 67 tours $\left(\text{ou } \dfrac{-11\pi}{6} \text{ à 66 tours}\right)$, on a $M_7 = M_2$.
$\dfrac{-803\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{6}(2\pi)$.
$\dfrac{\pi}{6}$ est dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi[$, c'est la mesure principale de l'angle $\dfrac{-803\pi}{6}$.

8. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_8}\right) = \dfrac{111\pi}{2}$
On peut placer $\dfrac{\pi}{2}$ et compter 111 fois cet angle, mais ça devient déraisonnable !
Pour la recherche d'une mesure principale (non obligatoire pour placer le point), on remarque que :
$\dfrac{111\pi}{2} = \dfrac{4\pi}{2} \times 27 + \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{4\pi}{2} \times 28 - \dfrac{\pi}{2} = 2\pi \times 28 - \dfrac{\pi}{2}$.
$\dfrac{111\pi}{3} \equiv \dfrac{3\pi}{2}(2\pi)$ ou $\dfrac{111\pi}{2} \equiv \dfrac{-\pi}{2}(2\pi)$ Le point M_8 est associé à l'angle $\dfrac{-\pi}{2}$ à 28 tours $\left(\text{ou } \dfrac{3\pi}{2} \text{ à 27 tours}\right)$.
$\dfrac{111\pi}{2} \equiv \dfrac{-\pi}{2}(2\pi)$.
$\dfrac{-\pi}{2}$ est dans l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi[$, c'est la mesure principale de l'angle $\dfrac{111\pi}{2}$.

☞**Exercice 4** ✧✧

Reprendre les angles de l'exercice précédent et donner les mesures principales de chacun.
Voir exercice précédent.

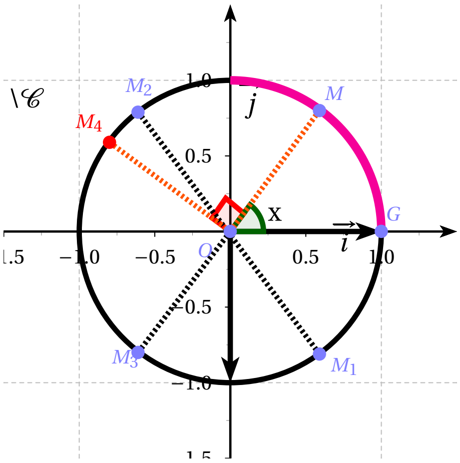
☞**Exercice 5** ✧✧



1. $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right)=\dfrac{\pi}{3}$
   Il s'agit d'un angle remarquable.
2. $\left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$
   $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right)=\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right)+\left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}.$
3. $\left(\overrightarrow{OM_2}\ ;\ \overrightarrow{OM_3}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$
   $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_3}\right)=\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_2}\right)+\left(\overrightarrow{OM_2}\ ;\ \overrightarrow{OM_3}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}.$
4. $\left(\overrightarrow{OM_3}\ ;\ \overrightarrow{OM_4}\right)=\pi$
   $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_4}\right)=\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM_3}\right)+\left(\overrightarrow{OM_3}\ ;\ \overrightarrow{OM_4}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\pi.$

☞Exercice 6 ✧

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.



Placer un point M du cercle $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = x$ avec $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Le point M se situe sur l'arc en couleur prune, sauf les points de coordonnées $(0\,;\,1)$ et $(1\,;\,0)$. Placer sur le cercle les points M_i tels que :

1. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_1}\right) = -x$
   On construit le point symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

2. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_2}\right) = -x+\pi$
   On construit le point symétrique de M_1 par rapport au point O.

3. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_3}\right) = x+\pi$
   On construit le point symétrique de M par rapport au point O.

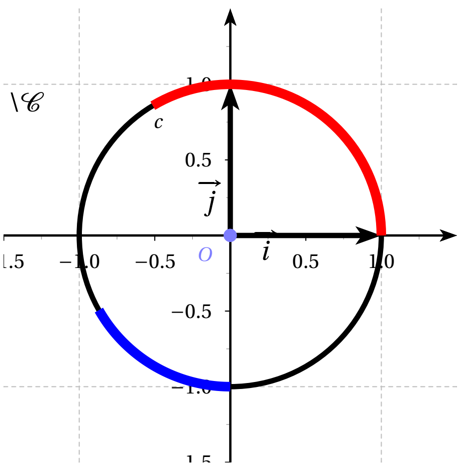
4. $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM_4}\right) = x+\frac{\pi}{2}$
   On construit le point rotation de M de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

☞Exercice 7 ✧

$\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.
Représenter en :

1. rouge, tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ tels que $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) \in \left[0\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$

2. bleu, tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ tels que $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) \in \left[\frac{-5\pi}{6}\,;\,\frac{-\pi}{2}\right]$



☞**Exercice 8** ✧

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{array}$$

.

1. $f(x+4\pi) = \sin\left(\dfrac{x+4\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = f(x)$. (La fonction sinus est de période 2π).
   Ainsi f est de période 4π.

2. $f(-x) = \sin\left(\dfrac{-x}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = -f(x)$ (la fonction sinus est impaire).
   Ainsi la fonction f est impaire. On restreint l'intervalle d'étude de la fonction f à $[0\,;\,2\pi]$.

3. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

4. $x \in [0\,;\,2\pi]$.
   Sur la cercle trigonométrique, $f'(x) = 0 \iff \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0 \iff \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0 \iff \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$:
   $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \pi + 4k\pi \\ x = -\pi + 4k\pi \end{array}\right.$$
   Or $x \in [0\,;\,2\pi]$ donc $x = \pi$ est le seule solution.
   par lecture du cercle trigonométrique, si $x \in [0\,;\,2\pi]$, $\dfrac{x}{2} \in [0\,;\,\pi]$ et $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \geqslant 0$ pour $\dfrac{x}{2} \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ soit $x \in [0\,;\,\pi]$.

5. Sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$: $f(0) = \sin(0) = 0$ et $f(\pi) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f(2\pi) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$

x	0		π		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	1	↘	0

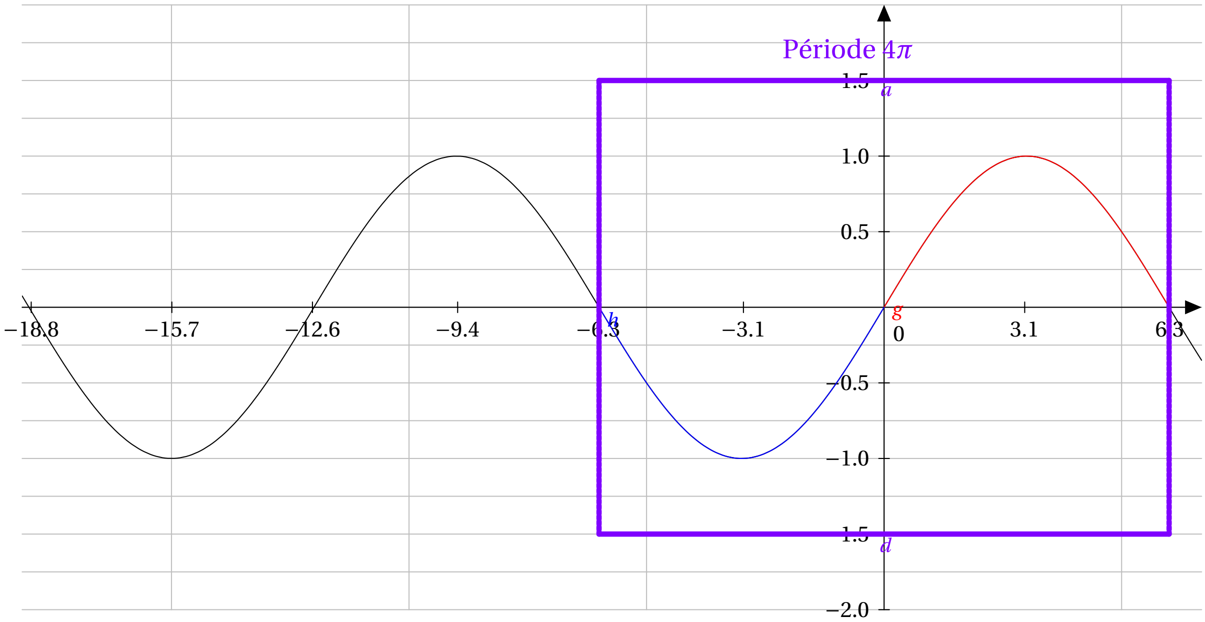
Par symétrie par rapport à l'origine (f impaire) on a le tableau sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$:

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
f	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Par symétrie par périodicité de 4π on en déduit le tableau sur $[-4\pi\,;\,2\pi]$:

x	-6π		-5π		-3π		$-\pi$		π		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	0

6. Sur GeoGebra :



☞Exercice 9 ✧

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par :

$$f:\begin{array}{rcl}[0\,;\,2\pi & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & f(x)=\dfrac{x}{2}+\cos(x)\end{array}$$

.

1. $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\sin(x)$.

2. $x\in[0\,;\,2\pi]$ $f'(x)=0 \iff \dfrac{1}{2}-\sin(x)=0 \iff \dfrac{1}{2}=\sin(x) \iff \sin(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

   $$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi+2k\pi=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$$

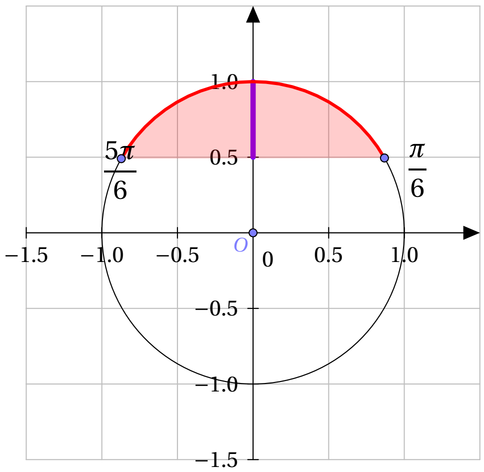
   Avec $k\in\mathbb{Z}$.

   Or $x\in[0\,;\,2\pi]$ donc $x=\dfrac{\pi}{6}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}$ sont les solutions de l'équation $f'(x)=0$.

   $f'(x)\geqslant 0 \iff \sin(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$.

   par lecture du cercle trigonométrique avec $x\in[0\,;\,2\pi]$, $\sin(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$ pour $x\in\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

   représentation du cercle trigonométrique :



3. Sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$: $f(0)=\dfrac{0}{2}+\cos(0)=1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\frac{\pi}{6}}{2}+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   et $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{\frac{5\pi}{6}}{2}+\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et et $f(2\pi)=\dfrac{2\pi}{2}+\cos(2\pi)=\pi+1$

x	0		$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	↘	$\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\pi+1$

4. Sur GeoGebra :