

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, **tenter les exercices** ✧✧.

Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, **les exercices** ✧✧, **tenter les exercices** ✧✧✧.

Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), **les exercices** ✧✧ **et les exercices** ✧✧✧ **et prendre des initiatives**.

savoir faire : travail autonome avec des stratégies d'auto-correction.

tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.

prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).



I. Calculs des termes d'une suite

🌀 Exercice 1 ✧

Calcul des termes d'une suites

1. On donne les expressions explicites des suites (expressions en fonction de n qui est un entier naturel). Calculer les quatre premiers termes :

(a) $u_n = n(n-1)$

(c) $w_n = 0,5^n - \frac{2}{2+n}$

(b) $v_n = \frac{n}{n+1}$

(d) $s_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n = \sum_{k=1}^n k^k, n \neq 0.$

2. À partir de relation de récurrence, n est un entier naturel. Calculer les termes au rang 1, 2 et 3 :

(a) $u_0 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 3$

(c) $w_n = u_n - 3$ (reprendre la suite u)

(b) $v_0 = 100, v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + n$

(d) $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \sum_{k=0}^n v_k$

3. Reprendre les questions 1) et 2) puis retrouver les résultats par le calcul avec la calculatrice, utiliser le menu des suites.

🌀 Exercice 2 ✧✧

Reprendre l'exercice précédent :

- Reprendre les questions 1) et 2) puis retrouver les résultats par le calcul avec le tableur.
- Reprendre les questions 1) et 2) puis retrouver les résultats approchés à l'aide de programmes sur Python utilisant la boucle For.

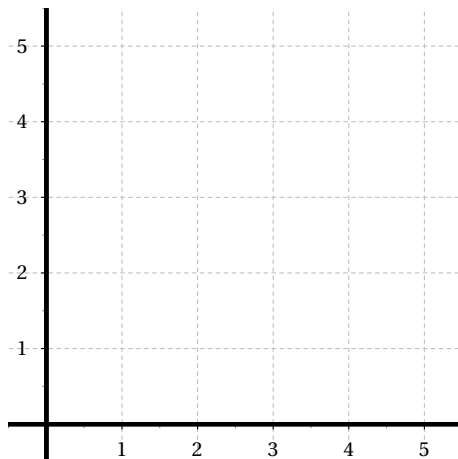
II. Variations et limite d'une suite

Exercice 3 ✦

Avec une formule explicite :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = n - \frac{1}{n}$.

1. Compléter le graphique suivant par les points qui représente les premiers termes de la suite (u_n) :



(a) Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) .

(b) Conjecturer la limite de (u_n) , soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n(n+1)}$.

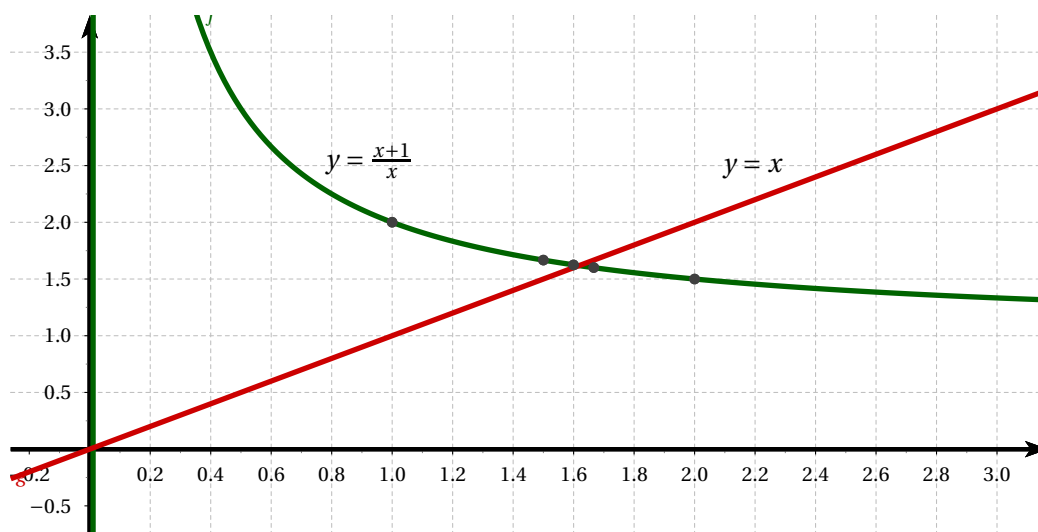
3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) .

Exercice 4 ✦

Avec une formule de récurrence :

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n}$ et $u_0 = 1$.

1. On a représenté la courbe d'équation $y = \frac{x+1}{x}$ et la droite $y = x$. Placer u_0 sur l'axe des abscisses. Construire u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.



2. Montrer que la suite (v_n) n'est ni croissante ni décroissante (des contre-exemples suffisent).
3. Conjecturer la limite de la suite (v_n) .

Exercice 5 ✦

Pour tout entier naturel n , la suite (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n - 2n$.
Déterminer le sens de variations de la suite (w_n) .

Exercice 6 ✦✦

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n - 1$.
On pose $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
Démontrer que la suite (s_n) est croissante.

III. Problèmes

Exercice 7 ✦

Le loyer mensuel d'un appartement augmente chaque année de 2%. On note u_0 le loyer mensuel de l'année en cours, il est de 500 € et u_n le loyer mensuel au bout de n années.
On note v_n le loyer annuel correspondant.

1. Calculer v_0 .
2. Calculer u_1 puis u_2 . En déduire v_1 et v_2 .
3. La suite (u_n) est croissante. Déterminer la première année à partir de laquelle $u_n > 600$.

Exercice 8 ✦✦

Reprendre l'exercice précédent.

1. Retrouver le résultat de la question 3) à partir du tableur.
2. Retrouver le résultat de la question 3) à partir d'un programme sur Python, utiliser la boucle While.

Exercice 9 ✦✦✦

Dans une banque on proposait deux rémunérations possibles pour un capital $C_0 = 1000$ € placé au 1^{er} janvier 2010 :

- contrat A : une augmentation annuelle de 1,5%,
- contrat B : chaque année, une augmentation de 2% du capital C_0 .

Quelle formule doit-on choisir ?

Formaliser l'exercice avec deux suites (u_n) et (v_n) à définir.



Exercice 1

1. vous trouverez la correction des cinq premiers termes de chaque suite, sauf pour s .

(a) $u_0 = 0 ; u_1 = 0 ; u_2 = 2 ; u_3 = 6 ; u_4 = 12$

(c) $w_0 = 0 ; w_1 = \frac{-1}{6} ; w_2 = \frac{-1}{4} ; w_3 = \frac{-11}{40} ;$

(b) $v_0 = 0 ; v_1 = \frac{1}{2} = 0,5 ; v_2 = \frac{2}{3} ; v_3 = \frac{3}{4} = 0,75 ; w_4 = \frac{-13}{48}$

$v_4 = \frac{4}{5} = 0,8$

(d) $s_1 = 1 ; s_2 = 5 ; s_3 = 32 ; s_4 = 288.$

2. (a) $u_1 = 5 ; u_2 = 13 ; u_3 = 29$

(c) $w_1 = 2 ; w_2 = 10 ; w_3 = 26$

(b) $v_1 = 50 ; v_2 = 26 ; v_3 = 15$

(d) $s_1 = 150 ; s_2 = 176 ; s_3 = 191$

Exercice 2 ✧✧

1. (a) Tableau de valeurs pour la première question :

	A	B	C	D	E	F
1	n	u_n	v_n	w_n	n^n	s_n
2	0	$=A2*(A2-1)$	$=A2/(A2+1)$	$=0,5; A2-2/(A2+2)$		
3	1	0	0,5	-0,17	$=A3; A3$	$=E3+F2$
4	2	2	0,67	-0,25	4	5
5	3	6	0,75	-0,275	27	32
6	4	12	0,8	-0,27	256	288

(b) Tableau de valeurs pour la deuxième question :

	A	B	C	D	E
1	n	u_n	v_n	w_n	s_n
2	0	1	100	$=B2-3$	100
3	1	$=2*B2+3$	$=C2/2+A2$	2	$=C3+E2$
4	2	13	26	10	176
5	3	29	15	26	196

2. (a) programme pour calculer les premiers termes des suites de la question 1 :

```

1 for n in range(0,4):
2     u=n*(n-1)
3     v=n/(n+1)
4     w=pow(0.5,n)-2/(2+n) #ou w=0.5**n-2/(2+n)
5     print('u(',n,')=',u,' ; v(',n,')=',v,' ; w(',n,')=',w)
6
7 s=0
8 for n in range(1,5):
9     s=s+pow(n,n)
10    print('s(',n,')=',s)

```

algo1.py

(b) programme pour calculer les premiers termes des suites de la question 2 :

```

1 u=1
2 v=100
3 w=u-3 #ce terme n'est pas demandé
4 s=100
5 for n in range(1,4):
6     u=2*u+3
7     v=v/2+(n-1)
8     w=u-3
9     s=s+v
10    print('u(',n,')=',u,' ; v(',n,')=',v,' ; w(',n,')=',w,' ; s(',n,')=',s)

```

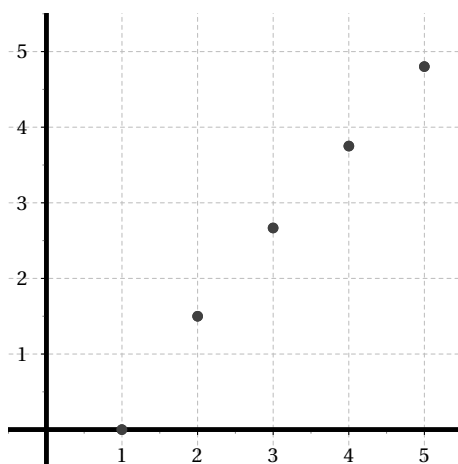
algo2.py

☞ **Exercice 3** ✦

Avec une formule explicite :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = n - \frac{1}{n}$.

1. Compléter le graphique suivant par les points qui représente les premiers termes de la suite (u_n) :



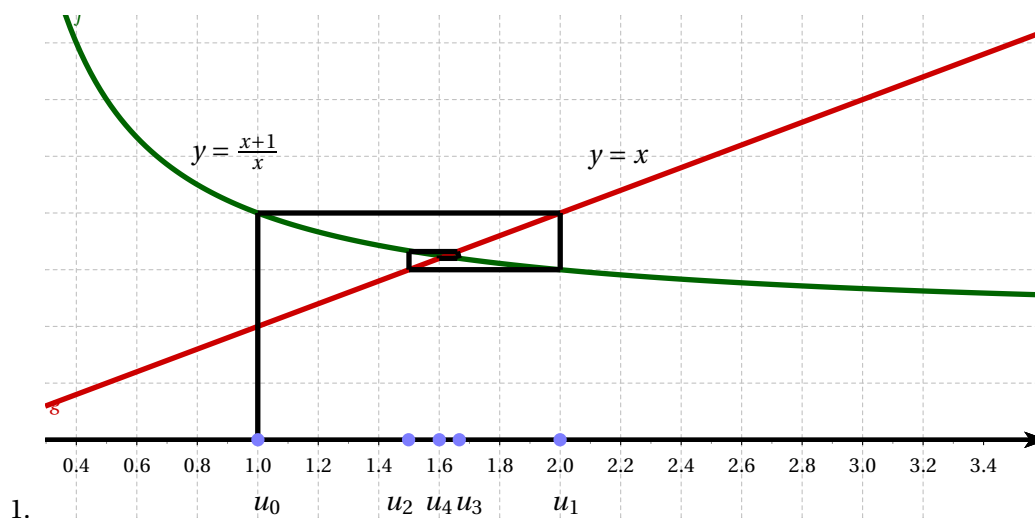
(a) La suite semble strictement croissante, lorsque n augmente, u_n augmente.

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$2. u_{n+1} - u_n = n + 1 - \frac{1}{n+1} - \left(n - \frac{1}{n}\right) = n + 1 - \frac{1}{n+1} - n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{-n + n + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n(n+1)}.$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, $n(n+1) > 0$ donc $1 + \frac{1}{n(n+1)} > 0$ soit $u_{n+1} - u_n > 0$ soit $u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est strictement croissante.

☞ **Exercice 4** ✦



1. $u_0 < u_1$ et $u_1 > u_2$ la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1,62$. La solution de l'équation $f(x) = x$ correspond, par le calcul formel on trouve $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62$.

☞ **Exercice 5** ✦

Pour tout entier naturel n , $w_{n+1} - w_n = -2n$.

Pour tout entier naturel n , $-2n < 0$ soit $w_{n+1} - w_n < 0$ soit $w_{n+1} < w_n$.

La suite (w_n) est strictement décroissante.

Exercice 6 ✧✧

$$s_{n+1} - s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} - (u_0 + u_1 + \dots + u_n) = u_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1.$$

Pour tout entier naturel n , $2n + 1 > 0$ soit $s_{n+1} - s_n > 0$ soit $s_{n+1} > s_n$.

La suite (s_n) est strictement croissante.

Exercice 7 ✧

1. $v_0 = 12 \times 500 = 6000$.

2. $u_1 = u_0 \times 1,02 = 500 \times 1,02 = 510$; $u_2 = u_1 \times 1,02 = 510 \times 1,02 = 520,2$; $v_1 = 12 \times 510 = 6120$ et $v_2 = 12 \times 520,2 = 6242,4$.

3. On calcule les termes de la suite (u_n) jusqu'à dépasser 600, on peut utiliser le menu des suites de la calculatrice.

On trouve $u_9 < 600$ et $u_{10} > 600$. La sixième année le loyer mensuel dépasse pour la première fois 600 €, il est d'environ 609,50 €.

Exercice 8 ✧✧

1. Avec le tableur :

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	500	=12*B2
3	1	=B2*1,02	6120
4	2	520,2	6242,4
...			
12	10	609,50	7313,97

2. Programme sur Python :

```
1 n=0
2 u=500
3 v=12*u
4 while u<600:
5     n=n+1
6     u=u*1.02
7     v=12*u
8     print('u(',n,')=',u, ' ; v(',n,')=',v)
```

algo3.py