Parcours différenciés : Suites arithmétique et géométrique

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

Exercice 1 ✧

Soit une suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 45$ et de raison $-0,5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
3. Exprimer u_n en fonction de n
4. Calculer u_{100}
5. Donner les variations de la suite (u_n)
6. Déterminer le plus petit entier naturel N tel que pour tout entier naturel n, $n > N$, on a $u_n < 0$:
   (a) à partir de la résolution d'une inéquation
   (b) à partir des variations de la suite (u_n) et des tables de la calculatrice
   (c) à partir des variations de la suite (u_n) et d'un algorithme utilisant la boucle *tant que*, à traduire en Python.

Exercice 2 ✧

Soit une suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 96$ et de raison $0,75$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
3. Exprimer u_n en fonction de n
4. Calculer u_{10}
5. Donner les variations de la suite (u_n)
6. Déterminer le plus petit entier naturel N tel que pour tout entier naturel n, $n > N$, on a $u_n < 1$:
   (a) à partir des variations de la suite (u_n) et des tables de la calculatrice
   (b) à partir des variations de la suite (u_n) et d'un algorithme utilisant la boucle tant que, à traduire en Python.

☞**Exercice 3** ✧

Soit une suite arithmétique (u_n) telle que $u_0 = 1$ et de raison 4.
La suite (v_n) est la somme des termes de la suite (u_n) : $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$

1. Calculer v_1, v_2 et v_3
2. Exprimer v_n en fonction de n
3. Calculer v_{10}
4. Déterminer le plus petit entier naturel N tel que pour tout entier naturel n, $n > N$, on a $v_n > 1\,484$:
   (a) à partir de la résolution d'une inéquation.
   (b) à partir des variations de la suite (v_n) et des tables de la calculatrice
   (c) à partir des variations de la suite (v_n) et d'un algorithme utilisant la boucle *tant que*, à traduire sur Python.

☞**Exercice 4** ✧

Soit une suite géométrique (u_n) telle que $u_0 = 1$ et de raison $1,5$.
La suite (v_n) est la somme des termes de la suite (u_n) : $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$

1. Calculer v_1, v_2 et v_3
2. Exprimer v_n en fonction de n
3. Calculer v_{10}
4. Déterminer le plus petit entier naturel N tel que pour tout entier naturel n, $n > N$, on a $v_n > 1\,000$:
   (a) à partir des variations de la suite (v_n) et des tables de la calculatrice
   (b) à partir des variations de la suite (v_n) et d'un algorithme utilisant la boucle *tant que*, à traduire sur Python.

☞**Exercice 5** ✧✧

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + 20$ et $u_0 = -5$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3
2. Est-ce que la suite (u_n) est arithmétique ? géométrique ? Justifier.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 10$.
   (a) Justifier que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

☞Exercice 6 ✧✧

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+7u_n}$ et $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3
2. Est-ce que la suite (u_n) est arithmétique ? géométrique ?
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{2-u_n}{u_n}$ (on admet que $u_n \neq 0$)
   (a) Montrer que la suite v_n est arithmétique.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire u_n en fonction de n.
   (d) Avec la méthode de votre choix déterminer le plus petit entier naturel N tel que pour tout entier naturel n, $n > N$, $u_n < 0,025$

☞Exercice 7 ✧✧

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2$.
Démontrer que la suite (v_n) est aussi une suite arithmétique. Quelle est sa raison ?

☞Exercice 8 ✧✧✧

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = au_n + b$ et u_0 un premier terme réel, a et b sont deux réels.

1. si $a = 1$ quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. si $b = 0$ quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. On suppose $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
   (a) soit la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + \dfrac{b}{a-1}$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Exprimer u_n en fonction de n.

☞Exercice 9 ✧✧✧

Dans un banque on proposait deux rémunérations possibles pour un capital $C_0 = 1000$ €placé au 1^{er} janvier 2010 :

- contrat A : une augmentation annuel de $1,5\%$,
- contrat B : chaque année, une augmentation de 2% du capital C_0.

Quelle formule doit-on choisir ?
Formaliser l'exercice avec deux suites (u_n) et (v_n) à définir.

Correction

Exercice 1 ✧

Soit une suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 45$ et de raison $-0,5$.

1. $u_1 = u_0 - 0,5 = 45 - 0,5 = 44,5$; $u_2 = u_1 - 0,5 = 44,5 - 0,5 = 44$ ou $u_2 = u_0 - 2 \times 0,5 = 45 - 1 = 44$; $u_3 = u_2 - 0,5 = 44 - 0,5 = 43,5$ ou $u_3 = u_0 - 3 \times 0,5 = 45 - 1,5 = 43,5$

2. $u_{n+1} = u_n - 0,5$

3. $u_n = 45 - 0,5n$

4. $u_{100} = 45 - 100 \times 0,5 = -5$

5. $u_{n+1} - u_n = -0,5$. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

6. (a) $u_n < 0 \Longleftrightarrow 45 - 0,5n < 0 \Longleftrightarrow -0,5n < -45 \Longleftrightarrow n > 90$.
   On choisit $N = 90$, pour tout entier naturel n, $n > 90$, $u_n < 0$.

   (b) Dans le menu des suites, on trouve $u_{90} = 0$ et $u_{91} = -0,5$.
   La suite (u_n) est strictement décroissante, ainsi pour tout entier naturel n, $n > 90$ $u_n < 0$.

   (c)
   $n \leftarrow 0$
   $u \leftarrow 45$
   tant que $u \geqslant 0$ faire
       $n \leftarrow n + 1$
       $u \leftarrow u - 0,5$
   Fin tant que

```python
def seuil(A):
    n=0
    u=45
    while u>=A:
        n=n+1
        u=u-0.5
    return n
```

prog1.py

la commande *seuil(0)* renvoie 91.
L'algorithme donne le premier rang pour lequel $u_n < 0$ soit 91 ainsi pour tout entier naturel n, $n > 90$ (on choisit $N = 90$), $u_n < 0$.

☞**Exercice 2** ✧

Soit une suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 96$ et de raison $0,75$.

1. $u_1 = u_0 \times 0,75 = 96 \times \dfrac{3}{4} = 3 \times 24 = 72$; $u_2 = u_1 \times \dfrac{3}{4} = 72 \times \dfrac{3}{4} = 18 \times 3 = 54$ ou $u_2 = u_0 \times 0,75^2 = 96 \times \dfrac{9}{16} = 9 \times 6 = 54$; $u_3 = u_2 \times \dfrac{3}{4} = 54 \times \dfrac{3}{4} = 13,5 \times 3 = 40,5$

2. $u_{n+1} = u_n \times 0,75 = \dfrac{3u_n}{4}$

3. $u_n = 96 \times 0,75^n = 96 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = \dfrac{96 \times 3^n}{4^n}$

4. $u_{10} = 96 \times 0,75^n \simeq 5,406$

5. $u_{n+1} - u_n = 96 \times 0,75^{n+1} - 96 \times 0,75^n = 96 \times 0,75^n\,(0,75 - 1) = -0,25 \times 96 \times 0,75^n < 0$.
   Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

6. (a) Dans le menu des suites, on trouve $u_{15} > 1$ et $u_{16} < 1$.
   La suite (u_n) est strictement décroissante, ainsi pour tout entier naturel n, $n > 15$ $u_n < 1$.

   (b)
   $n \leftarrow 0$
   $u \leftarrow 96$
   tant que $u \geqslant 0$ faire
   $\quad n \leftarrow n + 1$
   $\quad u \leftarrow 0,75u$
   Fin tant que

```python
def seuil(A):
    n=0
    u=96
    while u>=A:
        n=n+1
        u=u*0.75
    return n
```

prog2.py

   La commande *seuil(1)* renvoie 16.
   L'algorithme donne le premier rang pour lequel $u_n < 0$ soit 16 ainsi pour tout entier naturel n, $n > 15$ (on choisit $N = 15$), $u_n < 1$.

☞**Exercice 3** ✧

Soit une suite arithmétique (u_n) telle que $u_0 = 1$ et de raison 4.

La suite (v_n) est la somme des termes de la suite (u_n) : $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$

1. $v_1 = \sum_{k=0}^{1} u_k = u_0 + u_1 = 1 + 5 = 6$
   $v_2 = \sum_{k=0}^{2} u_k = u_0 + u_1 + u_2 = 1 + 5 + 9 = 15$ ou $v_2 = \sum_{k=0}^{2} u_k = \sum_{k=0}^{1} u_k + u_2 = 6 + 9 = 15$
   $v_3 = \sum_{k=0}^{3} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 5 + 9 + 13 = 28$ ou $v_3 = \sum_{k=0}^{3} u_k = \sum_{k=0}^{2} u_k + u_3 = 15 + 13 = 28$

2. $v_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \dfrac{1 + (1+4n)}{2} = (n+1)(1+2n)$

3. $v_{10} = 11(1 + 2 \times 10) = 231$.

4. (a) $v_n > 1\,484 \iff (n+1)(1+2n) - 1\,484 > 0 \iff 2n^2 + 3n - 1\,484 > 0$
   $2x^2 + 3x - 1\,484$ est l'expression d'un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 11881$ et de racines -28 et $26,5$.
   La parabole associée est tournée vers le haut, le coefficient du terme $2x^2$ est 2, il est positif. Ainsi pour tout réel $x > 26,5$, le polynôme est positif :

x	$-\infty$		-28		26.5		$+\infty$
$2x^2 + 3x - 1484$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Pour tout entier naturel $n > 26$ $(N = 26)$ $v_n > 1484$.

   (b) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 4$ et $4 > 0$, la suite (u_n) est croissante et comme $u_0 > 0$ la suite (u_n) est positive.
   $v_{n+1} - v_n = (u_0 + u_1 + ... + u_n + u_{n+1}) - (u_0 + u_1 + ... + u_n) = u_{n+1}$ et $u_{n+1} > 0$ donc la suite (v_n) est croissante.
   Avec les tables de la calculatrice dans le menu des suites en affichant la somme des termes de la suite (u_n) on obtient $v_{26} < 1\,484$ et $v_{27} > 1\,484$, la suite (v_n) étant croissante, on peut affirmer que pour tout entier naturel n, $n > 26$, $u_n > 1\,484$.

   (c)
   $n \leftarrow 0$
   $u \leftarrow 1$
   $s \leftarrow u$
   tant que $s \leqslant 1484$
   $\quad n \leftarrow n+1$
   $\quad u \leftarrow u+4$
   $\quad s \leftarrow s+u$
   Fin tant que

```python
def seuil(A):
    n=0
    u=1
    s=u
    while s<=A:
        n=n+1
        u=u+4
        s=s+u
    return n
```

prog3.py

La commande *seuil(1484)* renvoie 27.
Le programme retourne 27, la suite (v_n) étant croissante on peut affirmer que pour tout entier naturel n, $n > 26$ on a $v_n > 1484$.

Exercice 4 ✧

Soit une suite géométrique (u_n) telle que $u_0 = 1$ et de raison $1,5$.

La suite (v_n) est la somme des termes de la suite (u_n) : $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$

1. $v_1 = \sum\limits_{k=0}^{1} u_k = u_0 + u_1 = 1 + 1,5 = 2,5$

   $v_2 = \sum\limits_{k=0}^{2} u_k = u_0 + u_1 + u_2 = 1 + 1,5 + 1,5^2 = 4,75$ ou $v_2 = \sum\limits_{k=0}^{2} u_k = \sum\limits_{k=0}^{1} u_k + u_2 = 2,5 + 1,5^2 = 4,75$

   $v_3 = \sum\limits_{k=0}^{3} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 1,5 + 1,5^2 + 1,5^3 = 8,125$ ou

   $v_3 = \sum\limits_{k=0}^{3} u_k = \sum\limits_{k=0}^{2} u_k + u_3 = 4,75 + 1,5^3 = 8,125$

2. $v_n = 1 \times \dfrac{1 - 1,5^{n+1}}{1 - 1,5} = -2(1 - 1,5^{n+1}) = 2(1,5^{n+1} - 1)$

3. $v_{10} = 2(1,5^{11} - 1) \simeq 170,995$.

4. (a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 1,5^{n+1} - 1,5^n = 1,5^n(1,5 - 1) = 0,5 \times 1,5^n$ et $0,5 \times 1,5^n > 0$, la suite (u_n) est croissante et comme $u_0 > 0$ la suite (u_n) est positive.

   $v_{n+1} - v_n = (u_0 + u_1 + ... + u_n + u_{n+1}) - (u_0 + u_1 + ... + u_n) = u_{n+1}$ et $u_{n+1} > 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

   Avec les tables de la calculatrice dans le menu des suites en affichant la somme des termes de la suite (u_n) on obtient $v_{14} < 1\,000$ et $v_{15} > 1\,000$, la suite (v_n) étant croissante, on peut affirmer que pour tout entier naturel n, $n > 14$, $u_n > 1\,000$.

   (b)

   $n \leftarrow 0$
   $u \leftarrow 1$
   $s \leftarrow u$
   tant que $s \leqslant 1000$
       $n \leftarrow n + 1$
       $u \leftarrow 1,5u$
       $s \leftarrow s + u$
   Fin tant que

```python
def seuil(A):
    n=0
    u=1
    s=u
    while s<=A:
        n=n+1
        u=u*1.5
        s=s+u
        print(s)
    return n
```

prog4.py

La commande *seuil(1000)* renvoie 15.

Le programme retourne 15, la suite (v_n) étant croissante on peut affirmer que pour tout entier naturel n, $n > 14$ on a $v_n > 1000$.

☞Exercice 5 ✧✧

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + 20$ et $u_0 = -5$

1. $u_1 = 3 \times -5 + 20 = 5$; $u_2 = 3 \times 5 + 20 = 35$ et $u_3 = 3 \times 35 + 20 = 125$

2.
   - Raisonnons par l'absurde, si la suite est arithmétique alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$ où r est la raison de la suite. Or il existe les termes u_0, u_1 et u_2 tels que : $u_1 - u_0 = 5 - (-5) = 10$ et $u_2 - u_1 = 35 - 5 = 30$; on aboutit à une contradiction car $10 \neq 30$. Donc la suite n'est pas arithmétique.
   - Raisonnons par l'absurde, si la suite est géométrique alors pour tout entier naturel n avec $u_n \neq 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$ où r est la raison de la suite. Or il existe les termes u_0, u_1 et u_2 tels que : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{-5} = -1$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{35}{5} = 7$; on aboutit à une contradiction car $-1 \neq 7$. Donc la suite n'est pas géométrique.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 10$.

   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} + 10 = 3u_n + 20 + 10 = 3u_n + 30 = 3(u_n + 10) = 3v_n$. Ainsi $v_{n+1} = 3v_n$ et la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10 = -5 + 10 = 5$

   (b) $v_n = 5 \times 3^n$

   (c) $u_n = v_n - 10 = 5 \times 3^n - 10$

   (d) $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 5 \times 3^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 5 \times 3^n - 10 = +\infty$

☞Exercice 6 ✧✧

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+7u_n}$ et $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

1. $u_1 = \dfrac{2\times\frac{1}{2}}{2+7\times\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{11}$; $u_2 = \dfrac{2\times\frac{2}{11}}{2+7\times\frac{2}{11}} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$ et $u_3 = \dfrac{2\times\frac{1}{9}}{2+7\times\frac{1}{9}} = \dfrac{2}{25}$

2.
   - Raisonnons par l'absurde, si la suite est arithmétique alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$ où r est la raison de la suite. Or il existe les termes u_0, u_1 et u_2 tels que : $u_1 - u_0 = \dfrac{2}{11} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-7}{22}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{11} = \dfrac{-7}{99}$; on aboutit à une contradiction car $\dfrac{-7}{22} \neq \dfrac{-7}{99}$.
   Donc la suite n'est pas arithmétique.
   - Raisonnons par l'absurde, si la suite est géométrique alors pour tout entier naturel n avec $u_n \neq 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$ où r est la raison de la suite. Or il existe les termes u_0, u_1 et u_2 tels que :
   $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{2}{11}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{11}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{11}} = \dfrac{11}{18}$; on aboutit à une contradiction car $\dfrac{4}{11} \neq \dfrac{11}{18}$.
   Donc la suite n'est pas géométrique.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{2-u_n}{u_n}$ (on admet que $u_n \neq 0$)

   (a) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2-u_{n+1}}{u_{n+1}} - \dfrac{2-u_n}{u_n} = \dfrac{2-\frac{2u_n}{2+7u_n}}{\frac{2u_n}{2+7u_n}} - \dfrac{2-u_n}{u_n} = \dfrac{\frac{2(2+7u_n)-2u_n}{2+7u_n}}{\frac{2u_n}{1+7u_n}} - \dfrac{2-u_n}{u_n} = \dfrac{4+12u_n}{2u_n} - \dfrac{2-u_n}{u_n} = \dfrac{4+12u_n-2(2-u_n)}{2u_n} = \dfrac{14u_n}{2u_n} = 7.$
   Ainsi $v_{n+1} = v_n + 7$ et la suite est arithmétique de raison 7

   (b) $v_0 = \dfrac{2-u_0}{u_0} = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 3.$
   Pour tout entier naturel n, $v_n = 3+7n$.

   (c) $v_n = \dfrac{2-u_n}{u_n} \iff u_nv_n = 2-u_n \iff u_n(v_n+1) = 2 \iff u_n = \dfrac{2}{v_n+1}$ $(v_n \neq -1)$.
   $u_n = \dfrac{2}{3+7n+1} = \dfrac{2}{4+7n}$.

   (d) $u_n < 0,025 \iff \dfrac{2}{4+7n} < 0,025 \iff 2 < 0,025(4+7n) \iff 0,175n > 2-0,1 \iff n > \dfrac{1,9}{0,175}$.
   $\dfrac{1900}{175} = \dfrac{76}{7}$.
   Pour tout entier naturel n tel que $n > 10$, $u_n < 0,025$.

☞Exercice 7 ✧✧

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$ ainsi, $v_n = (u_n+r)^2 - u_n^2 = 2u_n + r^2$ et
$v_{n+1} = 2u_{n+1} + r^2 = 2(u_n+r) + r^2 = 2u_n + r^2 + 2r$.
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2r$
La suite (v_n) est arithmétique de raison $2r$.