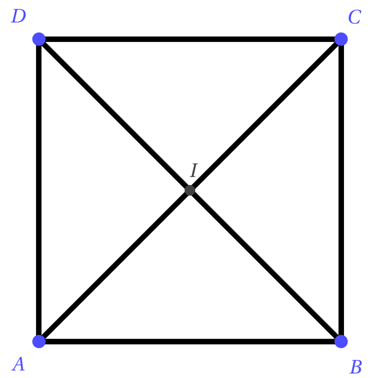
Parcours différenciés : Produit scalaire

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégies d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

☞Exercice 1 ✧

$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre I.



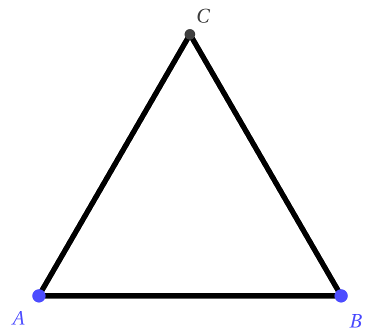
1. Calculer de quatre manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AI}$:
   (a) Dans un repère orthonormé
   (b) Avec l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
   (c) Avec le projeté orthogonal de I sur $[AB]$
   (d) Avec le projeté orthogonal de B sur $[AI]$
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{IC}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IB}$.
4. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IC}$.
5. Calculer de quatre manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$:
   (a) Dans un repère orthonormé
   (b) Avec l'angle $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$
   (c) Avec le projeté orthogonal de C sur $[AD]$
   (d) Avec le projeté orthogonal de D sur $[AC]$

☞Exercice 2 ✧✧✧

Reprendre l'exercice précédent avec $ABCD$ carré de côté a.

☞Exercice 3 ✧

ABC est un triangle équilatéral de côté 4.



Calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

1. Par le projeté orthogonal
2. Par l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

☞Exercice 4 ✧✧✧

Reprendre l'exercice précédent avec ABC triangle équilatéral de côté a.

☞Exercice 5 ✧

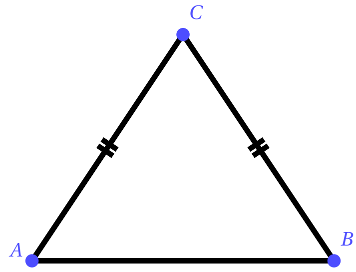
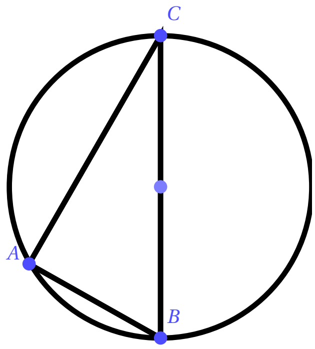
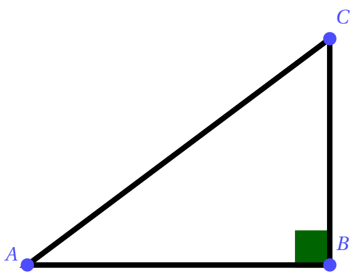
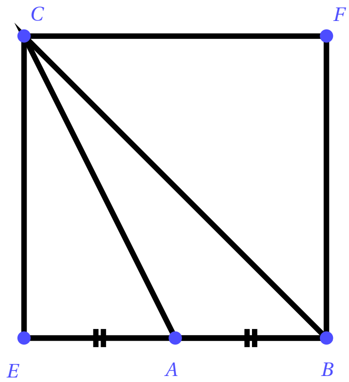
Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(2;1)$; $(3;-1)$ et $(5;4)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. Calculer les longueurs AB et AC.
3. En déduire l'angle $\widehat{BAC}$ (arrondir au degré).

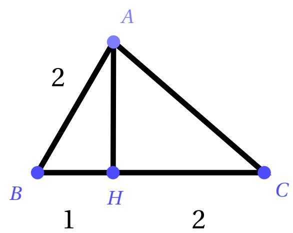
☞Exercice 6 ✧✧

Pour chacune des configurations associer le bon produit scalaire :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC$
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2$
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB^2$
4. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2}{2}$
5. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$
6. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AC$

figure A	figure B
	
figure C	figure D
	
figure E	figure F
	

☞**Exercice 7** ✧✧



Le triangle AHB est rectangle en H.

1. À partir de la figure ci-dessus, en utilisant des propriétés algébriques du produit scalaire (quitte à décomposer les vecteurs par la relation de Chasles), calculer :
   (a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}).\overrightarrow{AB}$
   (b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. Dans le repère orthonormé d'origine B et de vecteur d'abscisse $\overrightarrow{BC}$, retrouver les deux résultats précédents.

☞**Exercice 8** ✧

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(1;-1)$; $(3;3)$; $(-4;4)$ et $(2;1)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

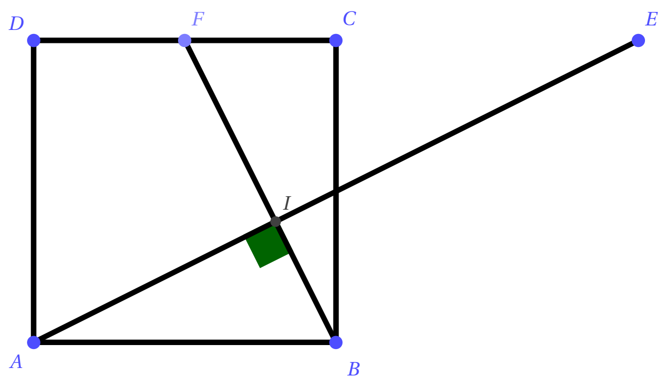
☞**Exercice 9** ✧✧

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}k\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2k+3\\k\end{pmatrix}$ tels que k est un nombre réel.
Déterminer k pour que :

1. Les vecteurs soient parallèles
2. Les vecteurs soient orthogonaux.

☞**Exercice 10** ✧✧

$ABCD$ est un carré de côté 1. E est le symétrique de D par rapport au point C et F est le milieu du côté $[CD]$.



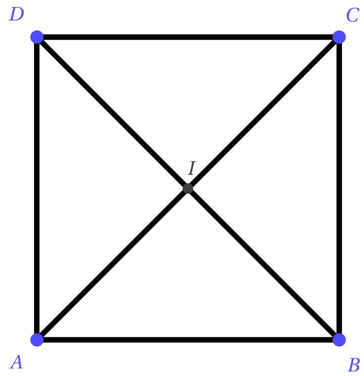
Le but de cet exercice est de démontrer de deux manières que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires.

1. En décomposant par la relation de Chasles les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FB}$, montrer que $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FB}=0$, puis conclure.
2. Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$, donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$ et du vecteur $\overrightarrow{FB}$, en déduire $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FB}=0$, puis conclure.

Correction

Exercice 1

$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre I.



1. Calculer de quatre manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AI}$:

   (a) Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$, on a les coordonnées suivantes $A(0;0)$, $B(4;0)$; $C(4;4)$; $D(0;4)$ et $I(2;2)$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = 4\times 2 + 4\times 0 = 8$.

   (b) $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.
   Avec le théorème de Pythagore, $AI = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2} = 2\sqrt{2}$.
   $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AI} = AB.AI.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 8$.

   (c) Soit H_I le projeté orthogonal orthogonal de I sur $[AB]$, H_I est le milieu du segment $[AB]$. Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = AB.AH_I = 4\times 2 = 8$.

   (d) Le projeté orthogonal de B sur $[AI]$ est I. Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = AI.AI = \left(2\times\sqrt{2}\right)^2 = 4\times 2 = 8$.

2. $\overrightarrow{DC}\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AI} = 8$

3. $\overrightarrow{DI}\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DC} = DC^2 = (2\sqrt{2})^2 = 2$.

4. $\overrightarrow{DI}\overrightarrow{IC} = 0$ (les droites (DI) et (IC) sont orthogonales).

5. Calculer de quatre manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}$:

   (a) Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\,;\,\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$, on a les coordonnées suivantes $A(0;0)$, $B(4;0)$; $C(4;4)$; $D(0;4)$ et $I(2;2)$.
   $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 4\times 0 + 4\times 4 = 16$.

   (b) $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$.
   Avec le théorème de Pythagore, $AC = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$.
   $\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = AC.AD.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4sqrt2\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 16$.

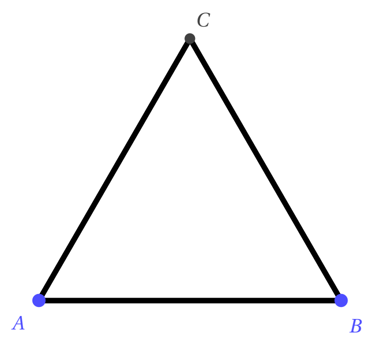
(c) Le projeté orthogonal de C sur $[AD]$ est D, ainsi $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AD.AD = 4^2 = 16$.

(d) Le projeté orthogonal de D sur $[AC]$ est I, ainsi $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AC.AI = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8 \times 2 = 16$.

☞Exercice 2 ✧✧✧

☞Exercice 3 ✧

ABC est un triangle équilatéral de côté 4.



Calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

1. Le projeté orthogonal de C sur le segment $[AB]$ est le milieu du segment $[AB]$. Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 2 = 8$.
2. $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$.
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 4 \times 4 \times \dfrac{1}{2} = 8$.

☞Exercice 4 ✧✧✧

☞Exercice 5 ✧

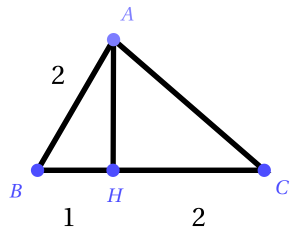
Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(2;1)$; $(3;-1)$ et $(5;4)$.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 3 - 2 \times 3 = -3$.
2. $AB = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
   $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \dfrac{-3}{\sqrt{5} \times 3\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{15}}{15}$.
   $\cos^{-1}\left(\dfrac{-\sqrt{15}}{15}\right) \simeq 75^{circ}$.

☞**Exercice 6** ✧✧

1.C ; 2.E ; 3.F ; 4.B ; 5.D ; 6.A

☞**Exercice 7** ✧✧



Le triangle AHB est rectangle en H.

1. À partir de la figure ci-dessus, en utilisant des propriétés algébriques du produit scalaire (quitte à décomposer les vecteurs par la relation de Chasles), calculer :
   (a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}).\overrightarrow{AB} = AB^2 + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = AB^2 + AH^2 = 4 + (2^2 - 1^2) = 7$
   (b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}) = AH^2 + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = (2^2-1^2)+0+0-2\times 1 = 1$
2. Dans le repère orthonormé d'origine B et de vecteur d'abscisse $\overrightarrow{BC}$, retrouver les deux résultats précédents.
   (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -1 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
   Ainsi $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}).\overrightarrow{AB} = (-1)\times(-1)+\sqrt{3}\times 2\sqrt{3} = 1+6 = 7$.
   (b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1\times 2+\sqrt{3}\times\sqrt{3} = -2+3 = 1$.

☞**Exercice 8** ✧

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(1;-1)$; $(3;3)$; $(-4;4)$ et $(2;1)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 2\times 6+4\times(-3) = 0$.
Le produit scalaire étant nul, les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

☞**Exercice 9** ✧✧

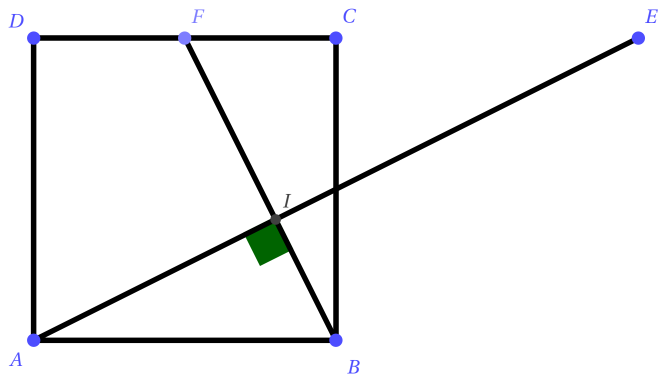
Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2k+3 \\ k \end{pmatrix}$ tels que k est un nombre réel.
Déterminer k pour que :

1. Les vecteurs soient parallèles :
   D'après l'ordonnée des vecteurs, le coefficient de proportionnalité des coordonnées est k avec $\vec{v} = k\vec{u}$.
   Avec les abscisses on a : $2k+3 = k\times k = k^2 \iff k^2-2k-3 = 0$.
   $\Delta = 4+12 = 16$, $k_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $k_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$.
   Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont parallèles et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont parallèles.

2. Les vecteurs soient orthogonaux :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff k(2k+3)+1\times k=0 \iff 2k^2+4k=0 \iff 2k(k+2)=0 \iff k=0$ ou $k=-2$.
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ sont orthogonaux et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

☞Exercice 10 ✧✧

$ABCD$ est un carré de côté 1. E est le symétrique de D par rapport au point C et F est le milieu du côté $[CD]$.



Le but de cet exercice est de démontrer de deux manières que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires.

1. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FB}=\left(\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DC}\right).\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}+2\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD}=0-AD.CB+DC^2+0=-AD^2+DC^2=0.$
Le produit scalaire des deux vecteurs non nuls $\overbrace{AE}$ et $\overrightarrow{FB}$ est nul donc les droites (AE) et (FB) sont perpendiculaires.

2. Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$,
$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et du vecteur $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}0,5\\-1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FB}=2\times 0,5-1\times 1=0$
Le produit scalaire des deux vecteurs non nuls $\overbrace{AE}$ et $\overrightarrow{FB}$ est nul donc les droites (AE) et (FB) sont perpendiculaires.