Parcours différenciés : Suites

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

I. Formules du cours

Exercice 1 ✧

A et B sont deux événements non vides d'un univers Ω tels que $P(A) = 0,2$ et $P_A(B) = 0,7$.

1. Calculer $P_A(\overline{B})$.
2. Calculer $P(A \cap B)$ en écrivant la formule utilisée.

Exercice 2 ✧

A et B sont deux événements non vides et **indépendants** d'un univers Ω tels que $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,4$.

1. Calculer (si nécessaire) $P_A(B)$, puis $P_B(\overline{A})$.
2. Calculer $P(A \cap B)$ en écrivant la formule utilisée.

Exercice 3 ✧✧

A et B sont deux événements non vides d'un univers Ω tels que $P(A) = 0,4$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2$ et $P(A \cap \overline{B}) = 0,3$.

1. Calculer $P_A(\overline{B})$.
2. Calculer $P(\overline{B})$ en écrivant la formule utilisée.
3. Calculer $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ en écrivant la formule utilisée.

Exercice 4 ✧

A et B sont deux événements non vides et **indépendants** d'un univers Ω tels que $P(A) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,1$.

1. Calculer $P(B)$ en écrivant la formule utilisée.
2. Calculer $P(A \cup B)$ en écrivant la formule utilisée.

II. Arbres et tableaux

☞**Exercice 5** ✧

Dans un population on a recensé les pratiquants d'une activité sportive suivant le sexe.
On choisit une personne au hasard dans cette population et on note :

- S la personne fait du sport,
- F la personne est une femme.

On donne $P(F) = 0,56$ et $P_F(S) = 0,8$ et $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0,3$.

1. Faites un arbre pondéré de probabilités de la situation.
2. Calculer $P(F \cap S)$.
3. Montrer que $P(S) = 0,756$.
4. En déduire $P_S(\overline{F})$.

☞**Exercice 6** ✧

En 2000, une enquête réalisée auprès de 10 508 personnes âgées de 18 à 75 ans a étudié la relation entre le tabagisme et les revenus. Les revenus sont répartis en trois tranches. Les résultats de l'enquête figurent dans le tableau suivant:

	Revenus inférieurs	Revenus moyens	Revenus supérieurs	Total
Fumeurs	1 126	1 155	914	3 195
Non-fumeurs	2 403	2 596	2 314	7 313
Total	3 529	3 751	3 228	10 508

Source : Baromètre de la santé, INVS

On choisit au hasard la fiche réponse d'un individu ayant participé à l'enquête.
On définit les événements suivants :

- F : « la fiche est celle d'un fumeur » ;
- $\overline{F}$: est l'événement contraire de l'événement F ;
- I : « la fiche est celle d'un individu dont les revenus sont dans la tranche des revenus inférieurs » ;
- M : « la fiche est celle d'un individu dont les revenus sont dans la tranche des revenus moyens » ;
- S : « la fiche est celle d'un individu dont les revenus sont dans la tranche des revenus supérieurs ».

1. Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un individu aux revenus moyens.
2. Calculer $p(F \cap M)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Sachant que la fiche choisie est celle d'un individu aux revenus moyens, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un fumeur.
4. On admet que $p_I(F) \approx 0,319$ et $p_S(F) \approx 0,283$.

   Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

☞**Exercice 7** ✧✧

Dans le cadre d'une campagne de réduction de la quantité de déchets, une enquête sur les habitudes de compostage est menée auprès des habitants d'une ville.
Les informations recueillies ont permis d'établir que :

- 20 % des personnes interrogées ont moins de 30 ans et parmi elles 30 % pratiquent le compostage ;
- la moitié des personnes entre 30 et 50 ans pratiquent le compostage ;
- 35 % des personnes interrogées ont plus de 50 ans et parmi elles 70 % pratiquent le compostage.

On choisit au hasard une personne parmi celles interrogées. On considère les événements suivants :

J : « la personne a moins de 30 ans » ;

M : « la personne a entre 30 ans et 50 ans » ;

S : « la personne a plus de 50 ans » ;

C : « la personne pratique le compostage ».

On note $\overline{C}$ l'événement contraire de C.

1. Est-il vrai qu'il y a plus d'une chance sur deux que la personne choisie pratique le compostage ? Justifier.
2. Sachant que la personne choisie ne pratique pas le compostage, quelle est la probabilité qu'elle ait au moins 30 ans ? *Arrondir au centième.*

III. Problèmes

☞**Exercice 8** ✧✧✧

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^e partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
3. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la limite de la suite (p_n) ?

☙✿ Correction ✿❧

☞Exercice 1 ✧

1. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,2 = 0,8.$
2. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$

☞Exercice 2 ✧

1. A et B sont indépendants donc $P_A(B) = P(B) = 0,4$.
   A et B sont indépendants donc $\overline{A}$ et B sont indépendants, $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$.
2. A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,4$.

☞Exercice 3 ✧✧

1. $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \dfrac{0,3}{0,4} = \dfrac{3}{4}$.
2. $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ forment une partition de $\overline{B}$ (ces deux événements sont disjoints (ou incompatibles) et leur réunion est l'événement $\overline{B}$), $P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2 + 0,3 = 0,5$.
3. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,4 + 1 - 0,5 - 0,2 = 0,9$.

☞Exercice 4 ✧

1. A et B sont indépendants, donc $P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,1}{0,4} = \dfrac{1}{4}$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,25 - 0,1 = 0,55$.

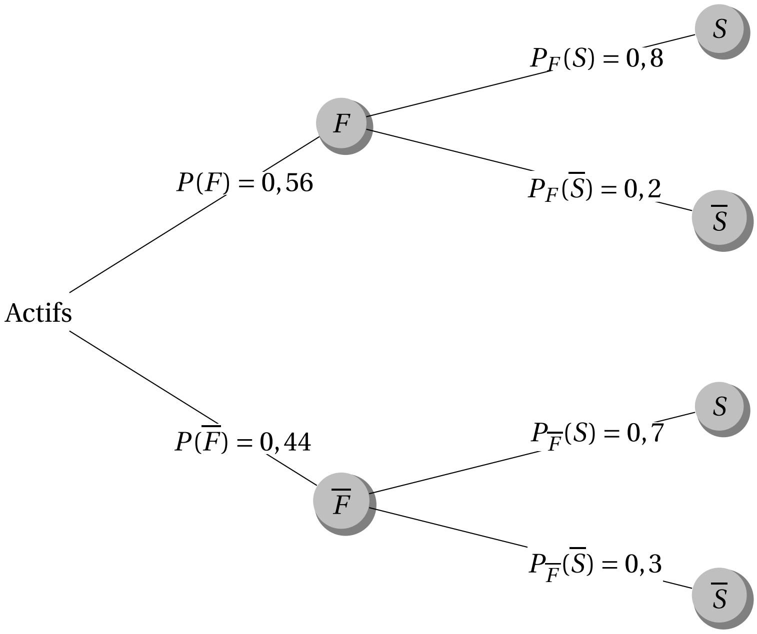
☞**Exercice 5** ✧

Dans un population on a recensé les pratiquants d'une activité sportive suivant le sexe.
On choisit une personne au hasard dans cette population et on note :

- S la personne fait du sport,
- F la personne est une femme.

On donne $P(F) = 0,56$ et $P_F(S) = 0,8$ et $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0,3$.

1. Arbre pondéré de probabilités de la situation :



2. $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,56 \times 0,8 = 0,448$.

3. $F \cap S$ et $\overline{S} \cap S$ forment une partition de S (ces deux événements sont disjoints (ou incompatibles) et leur réunion est l'événement S)
$P(S) = P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S) = P(F \cap S) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(S) = 0,448 + 0,44 \times 0,7 = 0,756$.

4. $P_S(\overline{F}) = \dfrac{P(S \cap \overline{F})}{P(S)} = \dfrac{P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(S)}{P(S)} = \dfrac{0,308}{0,756} = \dfrac{11}{27}$.

☞**Exercice 6** ✧

1. Il y a 3 751 individus dont les revenus sont dans la tranche des revenus moyens, et 10 508 individus en tout. On choisit une fiche au hasard, avec l'équiprobabilité, la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un individu aux revenus moyens est $\dfrac{3\,751}{10\,508} \approx 0,357$.

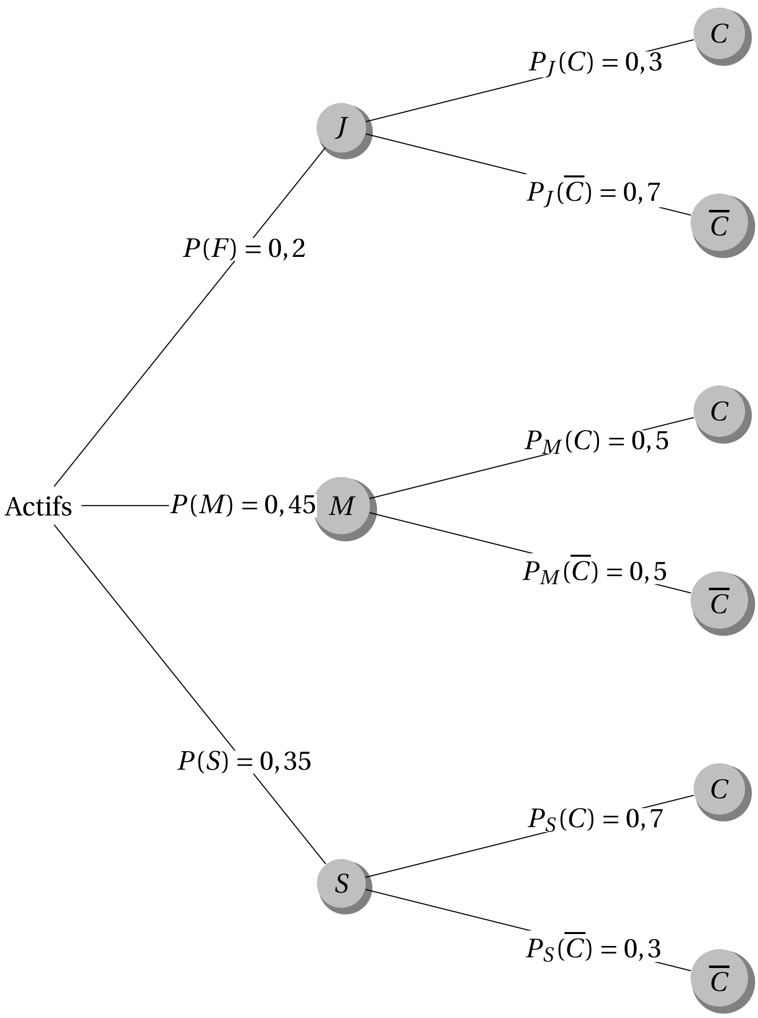
2. L'événement $F \cap M$ est l'événement « l'individu est fumeur et dans la tranche de revenus moyens » par équiprobabilité, $p(F \cap M) = \dfrac{1\,155}{10\,508} \approx 0,110$.
11 % des personnes observées sont des fumeurs ayant des revenus moyens.

3. Sachant que la fiche choisie est celle d'un individu aux revenus moyens, la probabilité qu'il s'agisse d'un fumeur est $p_M(F)$. Il y a 1 155 personnes aux revenus moyens et parmi eux 3 751 fumeurs, avec un nouveau cas d'équiprobabilité, on a donc $p_M(F) = \dfrac{1\,155}{3\,751} \approx 0,308$.

4. - $p_I(F) \approx 0,319$ donc il y a environ 31,9 % de fumeurs parmi les personnes à revenus inférieurs.
   - $p_S(F) \approx 0,283$ donc il y a environ 28,3 % de fumeurs parmi les personnes à revenus supérieurs.

☞**Exercice 7** ✧✧

1. On peut réaliser un arbre pondéré de probabilités :



$J \cap C$, $M \cap C$ et $S \cap C$ forment une partition de C, ils sont deux à deux disjoints et il forment C.
Avec la formule des probabilités totales, on a :
$P(C) = P(J \cap C) + P(M \cap C) + P(S \cap C) = P(J) \times P_J(C) + P(M) \times P_M(C) + P(S) \times P_S(C) = 0,2 \times 0,3 + 0,45 \times 0,5 + 0,35 \times 0,7 = 0,53$.
$0,53 > 0,5$ donc on a effectivement plus d'une chance sur deux que la personne choisie pratique le compostage.

2. M et S forment une partition de l'univers, ainsi $P_{\overline{C}}(M \cup S) = P_{\overline{C}}(M) + P_{\overline{C}}(S) = \dfrac{P(\overline{C} \cap M)}{P(\overline{C})} + \dfrac{P(\overline{C} \cap S)}{P(\overline{C})} = \dfrac{P(M) \times P_M(\overline{C})}{P(\overline{C})} + \dfrac{P(S) \times P_S(\overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,45 \times 0,5}{0,47} + \dfrac{0,35 \times 0,3}{0,47} \simeq 0,702$