Parcours différenciés : Fonction exponentielle

<u>Objectif 1 :</u> savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
<u>Objectif 2 :</u> savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
<u>Objectif 3 :</u> savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

☞Exercice 1 ✧

Dire si les égalités sont vraies ou fausses, $x \in \mathbb{R}$:

1. $e^{x+2} \times e^x = (e^{x+1})^2$
2. $\dfrac{e^{x+2}}{e^x} + 1 = \dfrac{e^{-2}+1}{e^{-2}}$
3. $e^x(e^x+1) = (e^x+1)^2 - 2e^x$
4. $\sqrt{\dfrac{e^{-x}}{e^x}} = \dfrac{1}{e^x}$

☞Exercice 2 ✧

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $e^x - 1 > 0$
2. $e^{x+2} = \dfrac{1}{e^x}$
3. $e^x(e^x+2) = 0$
4. $e^{2x} - 1 = 0$
5. $e^{2x} - 2e^x + 1 > 0$

☞Exercice 3 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - x \end{array}$$

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le signe de f'.
3. En déduire le tableau de variation de f.

☞Exercice 4 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$$

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le signe de f'.
3. En déduire le tableau de variation de f.

☞**Exercice 5** ✧

Soit la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{array}$$

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le signe de f'.
3. En déduire le tableau de variation de f.

☞**Exercice 6** ✧✧

Soit la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^x(x-2) \end{array}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le signe de f'.
3. En déduire le tableau de variation de f.
4. Étudier les variations de f'.
5. Déterminer toutes les tangentes à $\mathscr{C}$ ayant pour coefficient directeur -1.

☞**Exercice 7** ✧✧✧

Soit la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (mx+p)e^x \end{array}$$

m est un réel non nul et p un réel.
Étudier les variations de la fonction f.

Correction

Exercice 1

1. $e^{x+2} \times e^x = (e^{x+1})^2$
   $e^{x+2} \times e^x = e^{2x+2} = e^{2(x+1)} = (e^{x+1})^2$
   L'égalité est vraie.

2. $\dfrac{e^{x+2}}{e^x} + 1 = \dfrac{e^{-2}+1}{e^{-2}}$
   $\dfrac{e^{x+2}}{e^x} + 1 = e^{x+2-x} + 1 = e^2 + 1$ et $\dfrac{e^{-2}+1}{e^{-2}} = 1 + \dfrac{1}{e^{-2}} = 1 + e^2$.
   L'égalité est vraie.

3. $e^x(e^x+1) = (e^x+1)^2 - 2e^x$
   $e^x(e^x+1) = e^{2x} + e^x$ et $(e^x+1)^2 - 2e^x = (e^x)^2 + 2e^x + 1 - 2e^x = e^{2x} + 1$.
   L'égalité est vraie.

4. $\sqrt{\dfrac{e^{-x}}{e^x}} = \dfrac{1}{e^x}$
   $\sqrt{e^{-2x}} = \sqrt{(e^{-x})^2} = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
   L'égalité est vraie.

Exercice 2

1. $e^x - 1 > 0$:
   $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0 \iff x \in]0\,;\,+\infty[$.

2. $e^{x+2} = \dfrac{1}{e^x}$:
   $e^{x+2} = \dfrac{1}{e^x} \iff e^{x+2} = e^{-x} \iff x+2 = -x \iff 2x = -2 \iff x = -1$.

3. $e^x(e^x+2) = 0$:
   $e^x = 0$ ou $e^x + 2 = 0$
   Pour tout réel x $e^x > 0$ donc $e^x = 0$ et $e^x = -2$ n'admettent pas de solution, l'équation n'a pas de solution réelle.

4. $e^{2x} - 1 = 0$:
   $e^{2x} - 1 = 0 \iff (e^x-1)(e^x+1) = 0 \iff e^x = 1$ ou $e^x = -1 \iff e^x = e^0$ ou $e^x = -1 \iff x = 0$
   ou $e^{2x} - 1 = 0 \iff e^{2x} = e^0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$.

5. $e^{2x} - 2e^x + 1 > 0$ $e^{2x} - 2e^x + 1 > 0 \iff (e^x-1)^2 > 0 \iff x \in \mathbb{R}$ et $e^x - 1 \neq 0 \iff x \in \mathbb{R}$ et $e^x \neq 1 \iff x \in \mathbb{R}$ et $e^x \neq e^0 \iff x \in \mathbb{R}^*$

☞**Exercice 3** ✧

Soit la fonction f définie par

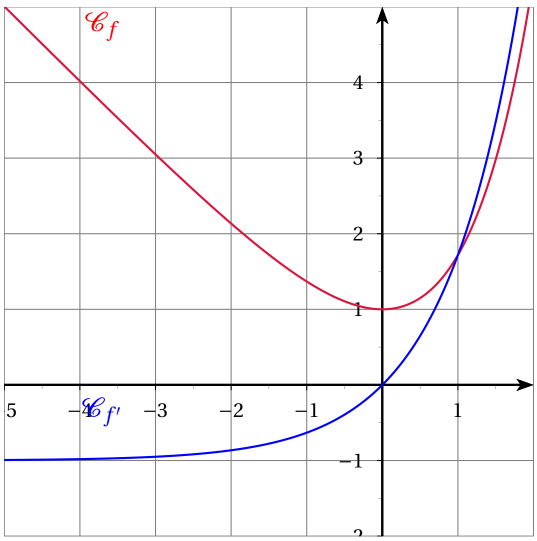
$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - x \end{array}$$

1. $f'(x) = e^x - 1$

2. $e^x - 1 > 0 \Longleftrightarrow e^x > 1 \Longleftrightarrow x > 0$
   $e^x - 1 = 0 \Longleftrightarrow e^x > 1 \Longleftrightarrow x = 0$
   $e^x - 1 < 0 \Longleftrightarrow e^x < 1 \Longleftrightarrow x < 0$

3. Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	



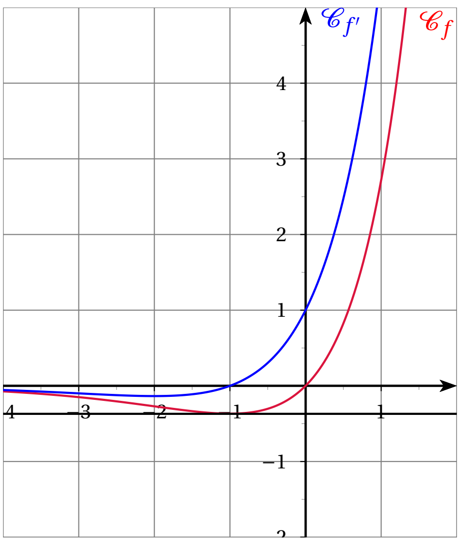
☞**Exercice 4** ✧

Soit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array}$$

1. $f = uv$ avec :
   $u(x) = x$; $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$; $v'(x) = e^x$
   $f' = u'v + uv'$
   $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$
2. Pour tout réel x, $e^x > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $x+1$.
   $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > -1$
   $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x < -1$
   $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$
3. Le tableau de variation de f :
   $f(-1) = -1e^{-1} = \dfrac{-1}{e} \simeq -0,37$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	↘		$-\dfrac{1}{e}$		↗



☞**Exercice 5** ✧

Soit la fonction f définie par

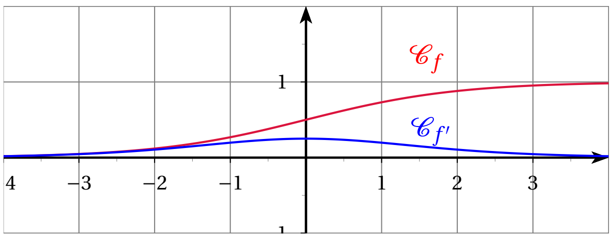
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{array}$$

1. $f = \dfrac{u}{v}$ avec :
   $u(x) = e^x$; $u'(x) = e^x$ et $v(x) = e^x + 1$; $v'(x) = e^x$
   $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
   $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

2. Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$ soit $f'(x) > 0$.

3. Le tableau de variation de f.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	↗



☞**Exercice 6** ✧✧

Soit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x(x-2) \end{array}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. $f = uv$ avec :
   $u(x) = x-2$; $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$; $v'(x) = e^x$
   $f' = u'v + uv'$
   $f'(x) = e^x + (x-2)e^x = e^x(x-1)$

2. Pour tout réel x, $e^x > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $x-1$.
   $f'(x) > 0 \iff x > 1$
   $f'(x) > 0 \iff x < 1$
   $f'(x) = 0 \iff x = 1$

3.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	$-e^x$	↗	

4. De la même manière, $f''(x) = xe^x$ et on a le tableau de variations de f' suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'		↘	-1	↗	

5. D'après le tableau de variation de la fonction f', -1 n'est atteint qu'en 0, il est le minimum de f', il existe donc une et une seule tangente à $\mathscr{C}$ dont le coefficient directeur est -1 son équation réduite est $y = -1(x-0) + f(0) \iff y = -x-2$