Parcours différenciés : Fonctions dérivées applications

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

Tous les exercices peuvent se faire sans calculatrice, entraînez vous à calculer sans calculatrice.

Pour chaque exercice, vérifier votre travail sur GeoGebra (calcul des fonctions dérivées, calcul formel des taux d'accroissemen développement, factorisation) et faites des graphiques pur vérifier vos résultats.

I. Étude de fonctions simples

Exercice 1 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2-2x+1 \end{array}$$

Étudier les variations de la fonction f à partir de l'étude du signe de la fonction dérivée f' de f.

Exercice 2 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3-4x^2+5x-1 \end{array}$$

Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 3 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl}]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{-3x+5}{2x-6} \end{array}$$

Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 4 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl}]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-\dfrac{3}{x} \end{array}$$

Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 5 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl}]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+\dfrac{3}{x} \end{array}$$

Étudier les variations de la fonction f.

☞**Exercice 6** ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{ccc}]-\infty\,;\,0,25[\cup]0,25\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1+\dfrac{1}{4x-1} \end{array}$$

Étudier les variations de la fonction f.

☞**Exercice 7** ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} [-2\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{7x+14} \end{array}$$

1. Est-ce que la fonction f est dérivable en -2 ? Justifier par le taux d'accroissement en -2.
2. Étudier les variations de la fonction f.

☞**Exercice 8** ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} [1\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+\sqrt{3x-3} \end{array}$$

1. Est-ce que la fonction f est dérivable en 1 ? Justifier par le taux d'accroissement en 1.
2. Étudier les variations de la fonction f.

☞**Exercice 9** ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} [-2\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\sqrt{0,5x+1} \end{array}$$

1. Est-ce que la fonction f est dérivable en -2 ? Justifier par le taux d'accroissement en -2.
2. Étudier les variations de la fonction f.

Correction

Exercice 1 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

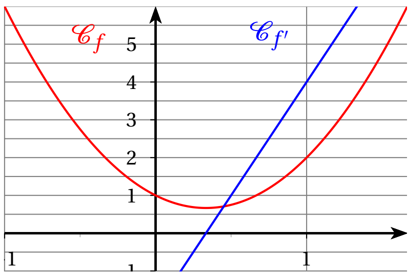
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, on peut calculer $f'(x)$ directement : $f'(x) = 6x - 2$

$f'(x) > 0 \iff 6x - 2 > 0 \iff x > \frac{1}{3}$.

$f'(x) > 0 \iff 6x - 2 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$.

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$\searrow$		$\frac{2}{3}$		$\nearrow$



☞Exercice 2 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \end{array}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, on peut calculer $f'(x)$ directement : $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

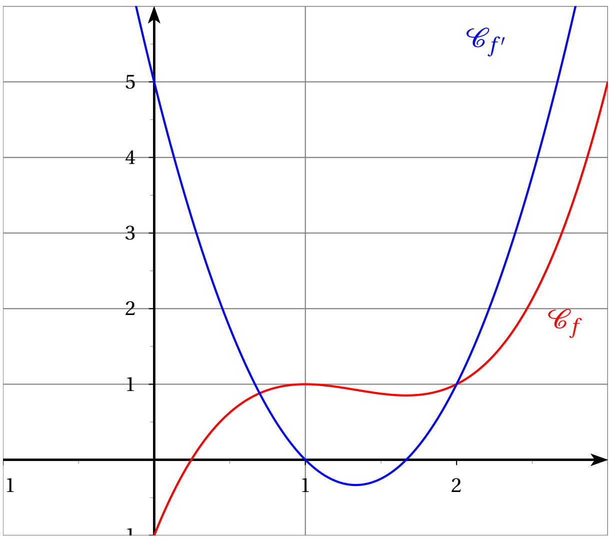
f' est une fonction polynôme du second degré, 1 est une racine évidente, ainsi pour tout réel x, $f'(x) = 3(x-1)\left(x - \frac{5}{3}\right)$.

le coefficient du terme $3x^2$ de $f'(x)$ est 3, il est positif.

Par la règle des signes on a le tableau de signe et le tableau de variations de la fonction f :

$f(1) = 1$ et $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{23}{27}$.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	1	↘	$\frac{23}{27}$	↗	



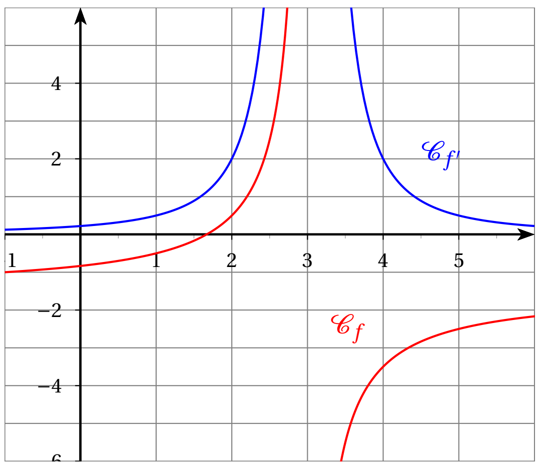
☞Exercice 3 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{ccc}]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-3x+5}{2x-6} \end{array}$$

f est dérivable sur $]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ car elle est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$:
$u(x)=-3x+5$ et $v(x)=2x-6$
$u'(x)=-3$ et $v'(x)=2$.
$f=\dfrac{u}{v}$ et $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
$f'(x)=\dfrac{-3(2x-6)-(-3x+5)\times 2}{(2x-6)^2}=\dfrac{8}{(2x-6)^2}=\dfrac{8}{4(x-3)^2}=\dfrac{2}{(x-3)^2}$
Pour tout réel x différent de 3, $(x-3)^2>0$ et $2>0$ donc $f'(x)>0$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f		↗	‖	↗	



☞**Exercice 4** ✧

Soit la fonction f définie par

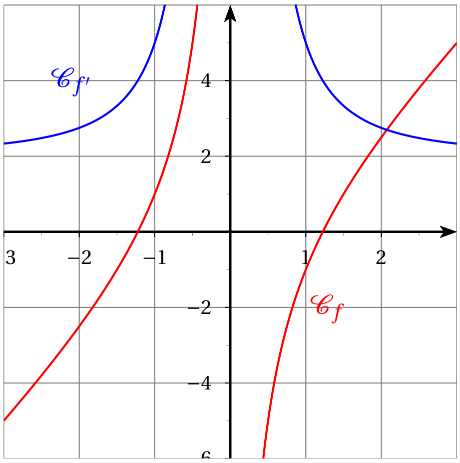
$$f:\begin{array}{ccc}]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-\dfrac{3}{x}\end{array}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car elle est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la dérivée d'une somme est le somme des dérivées, on peut calculer $f'(x)$ directement :

$f'(x)=2-3\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=2+\dfrac{3}{x^2}$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $2>0$ et $x^2>0$ soit $\dfrac{3}{x^2}>0$, donc $f'(x)>0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	‖	$+$
f	↗	‖	↗



☞**Exercice 5** ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl}]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+\dfrac{3}{x} \end{array}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car elle est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la dérivée d'une somme est le somme des dérivées, on peut calculer $f'(x)$ directement :

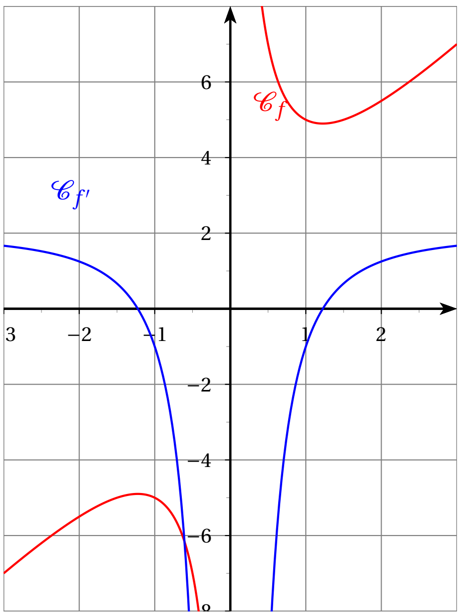
$f'(x)=2+3\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=2-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{2x^2-3}{x^2}=\dfrac{\left(x\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(x\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{x^2}$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x^2>0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de son numérateur $2x^2-3$.

Le numérateur de $f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont les réels $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Le coefficient du terme $2x^2$ du polynôme est positif, on en déduite le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f		↗	$2\sqrt{6}$	↘	||	↘	$-2\sqrt{6}$	↗	



Exercice 6 ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl}]-\infty\,;\,0,25[\cup]0,25\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1+\dfrac{1}{4x-1} \end{array}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,25\}$ par somme de deux dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{0,25\}$.

$u(x)=x+1\,;\,u'(x)=1$ et $v(x)=\dfrac{1}{4x-1}$

v est une fonction de la forme $\dfrac{1}{w}$ avec $w(x)=4x-1\,;\,w'(x)=4$.

$v'=\dfrac{-w}{w^2}\,;\,v'(x)=\dfrac{-4}{(4x-1)^2}$.

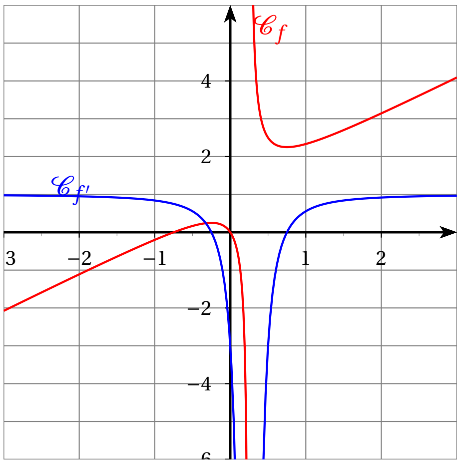
$f=u+v$ et $f'=u'+v'$.

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(4x-1)^2}=\dfrac{(4x-1)^2-4}{(4x-1)^2}=\dfrac{(4x-1-2)(4x-1+2)}{(4x-1)^2}=\dfrac{(4x-3)(4x+1)}{(4x-1)^2}$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{0,25\}$, $(4x-1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe du numérateur qui est un polynôme du second degré de racines $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{-1}{4}$.

Le terme $(4x)^2$ du polynôme du numérateur a pour coefficient 16, il est positif.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{4}$		$\dfrac{1}{4}$		$\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	$\dfrac{1}{4}$	↘	‖	↘	$\dfrac{9}{4}$	↗	



☞**Exercice 7** ✧

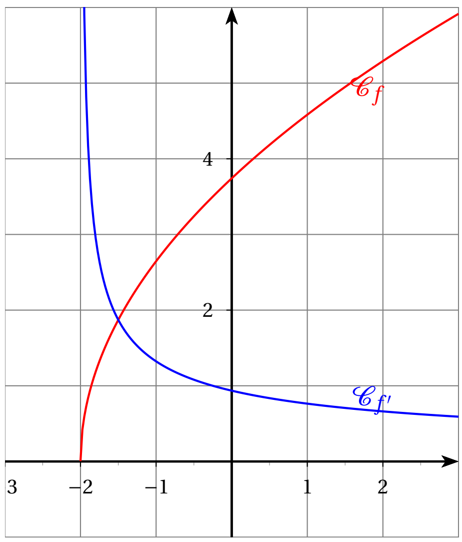
Soit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} [-2\,;\ +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{7x+14} \end{array}$$

1. Soit un réel $h>0$.
   $\tau(h) = \dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \dfrac{\sqrt{7(-2+h)+14}-0}{h} = \dfrac{\sqrt{7h}}{h} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{h}}$.
   $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{h}} = +\infty$.
   La limite n'est pas finie, la fonction f n'est pas dérivable en -2.

2. f est la composée de deux fonctions : $f(x) = g(7x+14)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$.
   La fonction g est dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$ ainsi la fonction f est dérivable sur $]-2\,;\ +\infty[$.
   $f'(x) = 7g'(7x+14) = 7 \times \dfrac{1}{2\sqrt{7x+14}} = \dfrac{7}{7x+14}$.
   Pour tout réel x de $]-2\,;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$.

x	-2		$+\infty$
f'	||	$+$	
f	0	$\nearrow$	



☞**Exercice 8** ✧

Soit la fonction f définie par

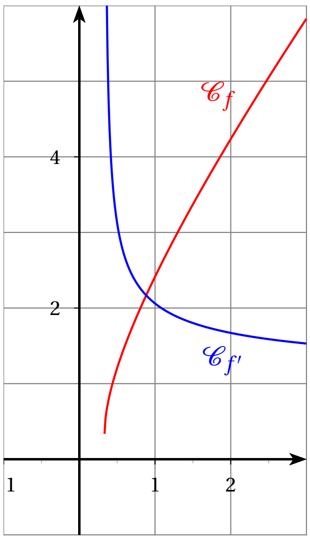
$$f : \begin{array}{rcl} [1\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+\sqrt{3x-3} \end{array}$$

1. Soit un réel $h>0$. $\tau(h)=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{1+h+\sqrt{3(1+h)-3}-1}{h}=\dfrac{h+\sqrt{3h}}{h}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{h}}$.

   $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} 1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h}}=+\infty$.
   La limite n'est pas finie, la fonction f n'est pas dérivable en 1.

2. f est la somme de deux fonctions dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$, elle dérivable sur cet intervalle. Pour la fonction qui a x associe $\sqrt{3x-3}$ elle est composée : $\sqrt{3x-3}=g(3x-3)$ avec $g(x)=\sqrt{x}$.
   $(\sqrt{3x-3})'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-3}}$.
   $f'(x)=1+\dfrac{3}{2\sqrt{3x-3}}$.
   Pour tout réel x de $]1\,;\,+\infty[$, $1>0$ et $\sqrt{3x-3}>0$ soit $\dfrac{3}{2\sqrt{3x-3}}>0$ donc $f'(x)>0$.

x	1	$+\infty$
f'	||	$+$
f	0 ↗	



☞**Exercice 9** ✧

Soit la fonction f définie par

$$f: \begin{array}{rcl} [-2\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\sqrt{0,5x+1} \end{array}$$

1. Soit un réel $h>0$. $\tau(h)=\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\dfrac{(-2+h)\sqrt{(0,5(-2+h)+1}-0}{h}=\dfrac{(-2+h)\sqrt{0,5h}}{h}=\sqrt{0,5}\times(-2+h)$.
   $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\sqrt{0,5}\times(-2+h)=\sqrt{0,5}\times(-2)=-\sqrt{2}$.
   La fonction f est dérivable en -2 et $f'(-2)=-\sqrt{2}$.

2. Étudier les variations de la fonction f. f est dérivable en -2 d'après la question 1) et elle dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ car elle est le produit de deux fonctions dérivables sur $]-2\,;\,+\infty[$.
   $u(x)=x\,;\,u'(x)=1$ et $v(x)=\sqrt{0,5x+1}\,;\,v'(x)=\dfrac{0,5}{2\sqrt{0,5x+1}}=\dfrac{1}{4\sqrt{0,5x+1}}$.
   $f=uv$ et $f'=u'v+uv'$.
   $f'(x)=\sqrt{0,5x+1}+x\times\dfrac{1}{4\sqrt{0,5x+1}}=\dfrac{4(0,5x+1)+x}{4\sqrt{0,5x+1}}=\dfrac{3x+4}{4\sqrt{0,5x+1}}$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$, $\sqrt{0,5x+1}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur $3x+4$.
   $3x+4>0\iff x>\dfrac{-4}{3}$ et $3x+4=0\iff x=\dfrac{-4}{3}$.

x	-2		$\frac{-4}{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$\frac{-4\sqrt{3}}{9}$	↗