Parcours différenciés : Fonctions dérivées et tangentes

Objectif 1 : savoir faire les exercices ✧, tenter les exercices ✧✧.
Objectif 2 : savoir faire les exercices ✧, les exercices ✧✧, tenter les exercices ✧✧✧.
Objectif 3 : savoir faire les exercices ✧ (si possible mentalement), les exercices ✧✧ et les exercices ✧✧✧ et prendre des initiatives.
savoir faire : travail autonome avec des stratégie d'auto-correction.
tenter : travail de recherche, précision (par écrit) des pistes engagées, réflexion sur les résultats éventuellement établis.
prendre des initiatives : étendre l'exercice à une réflexion personnelle pour prolonger le travail réalisé (recherches documentaires, se poser des questions et y répondre, trouver d'autres solutions pour une même question).

Tous les exercices peuvent se faire sans calculatrice, entraînez vous à calculer sans calculatrice.

I. Calcul de fonctions dérivées

☞Exercice 1 ✧

Les fonctions f_i suivantes sont définies et dérivables sur l'intervalle I_i. Calculer $f_i'(x)$, f_i' désigne la fonction dérivée de f_i, i entier variant de 1 à 6.

1. $I = \mathbb{R}$,
   $f_1(x) = 4 - x$
2. $I = \mathbb{R}$,
   $f_2(x) = 3x^2 - 5x + 1$
3. $I = \mathbb{R}$,
   $f_3(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5x^2}{4} + \dfrac{3x}{2} - 1$
4. $I =]0\,;\,+\infty[$,
   $f_4(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x}$
5. $I =]0\,;\,+\infty[$,
   $f_5(x) = (3x-1)\sqrt{x}$
6. $I =]0\,;\,+\infty[$,
   $f_6(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$

☞Exercice 2 ✧

Les fonctions f_i suivantes sont définies et dérivables sur l'intervalle I_i. Calculer $f_i'(x)$, f_i' désigne la fonction dérivée de f_i, i entier variant de 1 à 3.

1. $I = \mathbb{R}$,
   $f_1(x) = (2x-1)^2$
2. $I = \mathbb{R}$,
   $f_2(x) = (-x+1)^3$
3. $I =]-2\,;\,+\infty[$,
   $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2} + 1}$

☞Exercice 3 ✧✧✧

Soit la fonction f définie et dérivable :

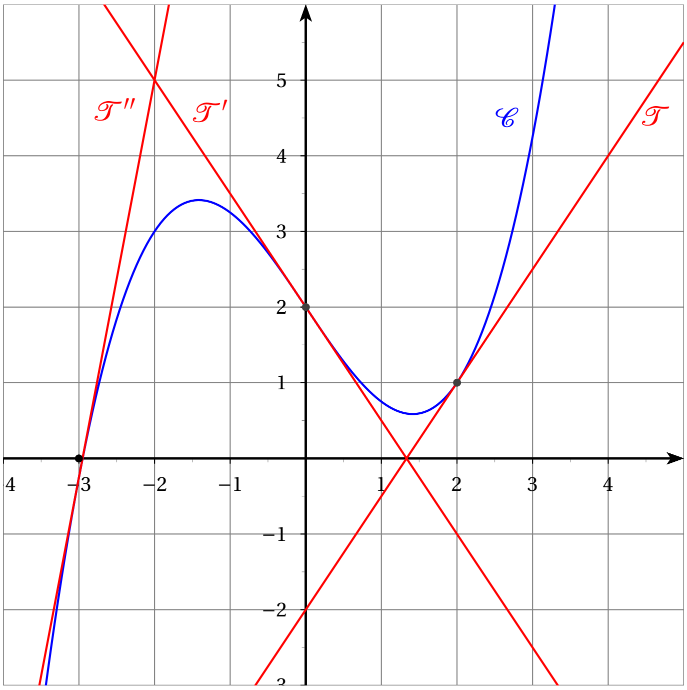
$$f : \begin{array}{rcl}]0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+1} \end{array}$$

Calculer $f'(x)$, f' désigne la fonction dérivée de f.

II. Tangentes à une courbe

☞**Exercice 4** ✧

Sur le graphique suivant on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f, et sa tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 2, $\mathscr{T}'$ au point d'abscisse 0 et $\mathscr{T}''$ au point d'abscisse -3.

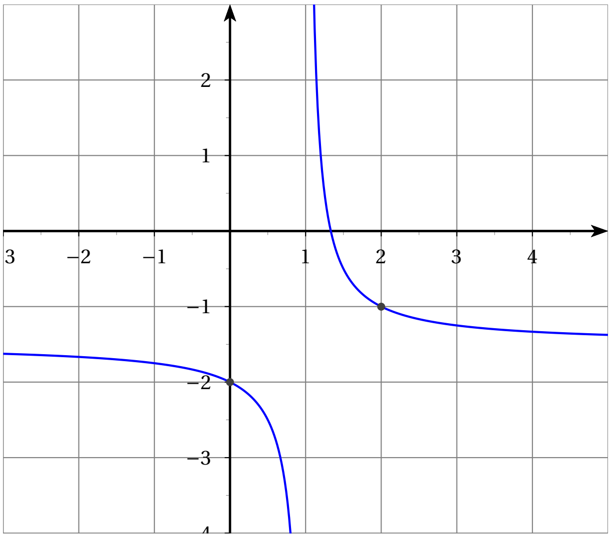


Lire graphiquement :

1. (a) $f'(2)$, $f'(0)$ et $f'(-3)$.
   (b) Pour ne pas confondre, lire $f(2)$, $f(0)$ et $f(-3)$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$, puis une équation de la tangente $\mathscr{T}'$, puis une équation de la tangente $\mathscr{T}''$.
3. (a) Donner le(s) solution(s) de l'équation $f'(x) = 0$. Tracer les tangentes horizontales associées.
   (b) Pour ne pas confondre, le(s) solution(s) de l'équation $f(x) = 0$
4. pour les deux questions suivantes, on pourra faire un tableau de signe :
   (a) Le signe de $f'(x)$,
   (b) Pour ne pas confondre, les solutions de l'équation $f(x) = 0$

☞**Exercice 5** ✧

Sur le graphique suivant on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. On donne $f'(2) = 0,5$, tracer la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe au point d'abscisse 2.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$.
3. On donne $f'(0) = 0,5$, tracer la tangente $\mathscr{T}'$ à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}'$.
5. Comment sont les droites $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$? Justifier.

☞**Exercice 6** ✧

Soit la fonction f :

$$f: \begin{array}{rcl}]1\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} \end{array}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que $f'(x) = -\dfrac{x+1}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$.
3. Vérifier vos travaux avec GeoGebra.

☞**Exercice 7** ✧✧

Soit la fonction f :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x^2 - x - 1 \end{array}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
Combien existe-t-il de tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}$?

☞**Exercice 8** ✧✧✧

Soit la fonction f :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x^2 - x - 1 \end{array}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer la tangente au point d'abscisse -1.
2. Existe-t-il une ou plusieurs tangentes parallèles à $\mathscr{T}$?

Correction

Exercice 1

1. $I = \mathbb{R}$,
   $f_1(x) = 4 - x$
   Une fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$:
   $f_1'(x) = -1$

2. $I = \mathbb{R}$,
   $f_2(x) = 3x^2 - 5x + 1$
   Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées :
   $f_2'(x) = 3 \times 2x - 5 = 6x - 5$

3. $I = \mathbb{R}$,
   $f_3(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5x^2}{4} + \dfrac{3x}{2} - 1$
   Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées :
   $f_3'(x) = \dfrac{1}{6} \times 3x^2 - \dfrac{5}{4} \times 2x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x}{2} + \dfrac{3}{2}$

4. $I =]0\,;\,+\infty[$,
   $f_4(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x}$
   f_4 est la somme de fonctions dérivables sur I, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées :
   $f_4'(x) = 2x - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2x + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$.

5. $I =]0\,;\,+\infty[$,
   $f_5(x) = (3x - 1)\sqrt{x}$
   f_5 est le produit de fonctions dérivables sur I, $f = uv$ et $f' = u'v + uv'$ avec :
   $u(x) = 3x - 1$, $u'(x) = 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   $f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x - 1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x + 3x - 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9x - 1}{2\sqrt{x}}$.

6. $I =]0\,;\,+\infty[$,
   $f_6(x) = \dfrac{3x^2}{x + 1}$
   f_6 est le quotient de fonctions dérivables sur I, $f = \dfrac{u}{v}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :
   $u(x) = 3x^2$, $u'(x) = 6x$ et $v(x) = x + 1$, $v'(x) = 1$.
   $f'(x) = \dfrac{6x(x + 1) - 3x^2 \times 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{3x^2 + 6x}{(x + 1)^2}$.

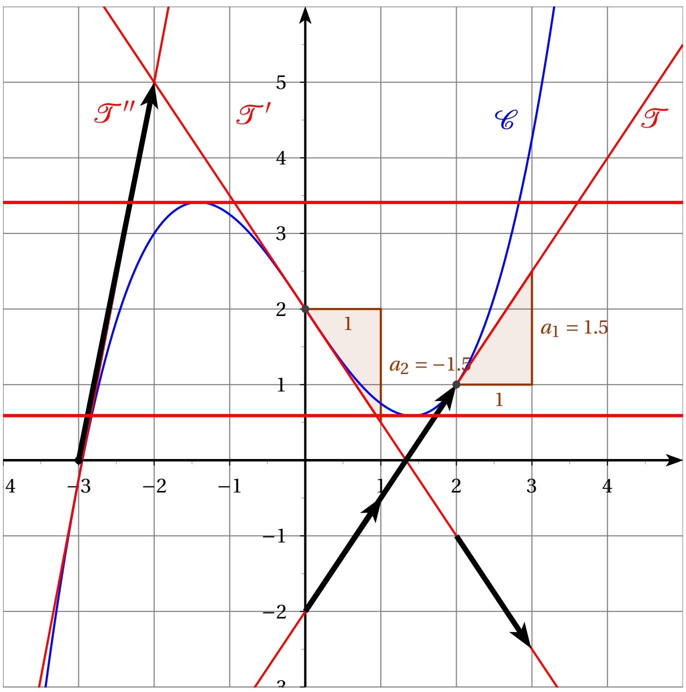
☞Exercice 2 ✧

Les fonctions f_i suivantes sont définies et dérivables sur l'intervalle I_i. Calculer $f_i'(x)$, f_i' désigne la fonction dérivée de f_i, i entier variant de 1 à 3.

1. $I = \mathbb{R}$, $f_1(x) = (2x-1)^2$
   f_1 est la composée de fonctions dérivables sur I, $f = u^2$ et $f' = 2u'u$ avec :
   $u(x) = 2x-1$, $u'(x) = 2$.
   $f_1'(x) = 2\times 2(2x-1) = 4(2x-1)$.
2. $I = \mathbb{R}$, $f_2(x) = (-x+1)^3$
   f_2 est la composée de fonctions dérivables sur I, $f = u^3$ et $f' = 3u'u^2$ avec :
   $u(x) = -x+1$, $u'(x) = -1$.
   $f_2'(x) = 3\times(-1)(-x+1) = -3(-x+1)$.
3. $I =]-2\,;\,+\infty[$, $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}+1}$
   f_3 est la composée de fonctions dérivables sur I, $f = \sqrt{u}$ et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec :
   $u(x) = \dfrac{x}{2}+1$, $u'(x) = \dfrac{1}{2}$.
   $f_3'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x}{2}+1}} = \dfrac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}+1}}$.

☞Exercice 4 ✧

Sur le graphique suivant on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f, et sa tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 2, $\mathscr{T}'$ au point d'abscisse 0 et $\mathscr{T}''$ au point d'abscisse -3.



1. (a) Nombre dérivé
   - $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
     La droite $\mathscr{T}$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.
     Ainsi $f'(2) = \dfrac{3}{2} = 1,5$.

- $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
  La droite $\mathscr{T}'$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.
  Ainsi $f'(0) = -\dfrac{3}{2} = -1,5$.
- $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -3.
  La droite $\mathscr{T}''$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
  Ainsi $f'(2) = 5$.

(b) images

- $f(2)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 2, $f(2) = 1$.
- $f(0)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0, $f(0) = 3$.
- $f(-3)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse -3, $f(-3) = 0$.

2. Équation de tangentes,

- $\mathscr{T} : y = \dfrac{3x}{2} - 2$ (l'ordonnée à l'origine est -2, le coefficient directeur $1,5$)
- $\mathscr{T}' : y = -\dfrac{3x}{2} + 2$ (l'ordonnée à l'origine est 2, le coefficient directeur $-1,5$)
- $\mathscr{T}'' : y = 5x + p$ (le coefficient directeur est 5).
  La droite passe par le point de coordonnées $(-3\,;\,0)$ ainsi $0 = 5 \times -3 + p$ soit $p = 15$.
  $\mathscr{T}'' : y = 5x + 15$

3. (a) On cherche les abscisses des points de la courbe qui admettent une tangente horizontale.
   On lit $x = -,15$ et $x = 1,5$. Les équations de ces tangentes sont respectivement $y = 3,4$ et $y = 0,6$ (voir graphique)

   (b) On lit l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 0 (il n'y en a qu'un seul dans cet exemple), on lit $x = -3$.

4. pour les deux questions suivantes, on pourra faire un tableau de signe :

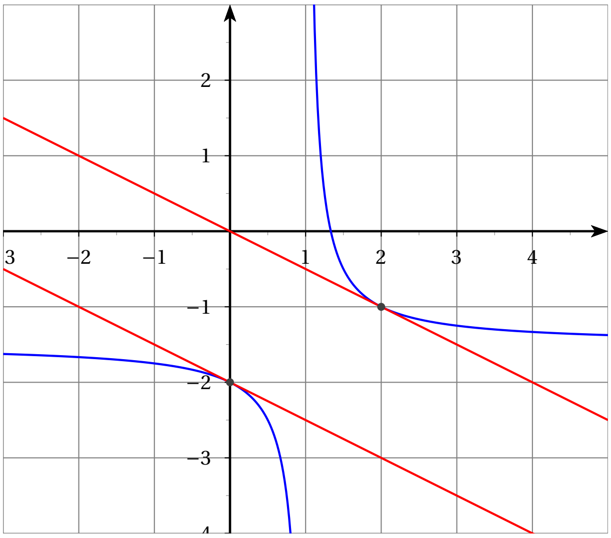
   (a) Si on trace toutes les tangentes à la courbe, on peut lire le signe des coefficients directeurs :

x	$-\infty$		-1.5		1.5		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

   (b) le signe de f :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

☞Exercice 5 ✧



1. La tangente passe par le point d'abscisse 2 de la courbe, elle est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.
2. $\mathscr{T}\ :\ y = -0,5x$ par lecture graphique.
3. La tangente passe par le point d'abscisse 0 de la courbe, elle est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.
4. $\mathscr{T}'\ :\ y = 0,5x - 2$ par lecture graphique.
5. Les droites $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont parallèles, elles sont dirigées par le même vecteur de coordonnée $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$, elles ont le même coefficient directeur $0,5$.

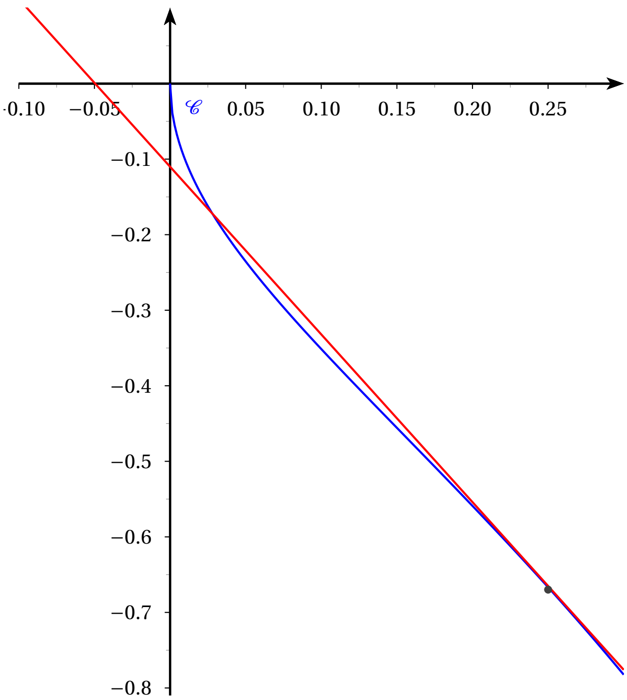
☞Exercice 6 ✧

Soit la fonction f :

$$f:\ \begin{array}{rcl}]1\ ;\ +\infty & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} \end{array}$$

1. $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x-1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-2x}{2(x-1)^2\sqrt{x}} = -\dfrac{x+1}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$.
   $y = f'\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + f\left(\dfrac{1}{4}\right)$.
   $y = -\dfrac{20}{9}\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{-2}{3}$
   $y = \dfrac{20x}{9} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{6}{9}$
   $y = -\dfrac{20x}{9} - \dfrac{1}{9}$.

3. figure :



$\frac{20}{9} \simeq -2,22$ et $-\frac{1}{9} \simeq -0,11$.

☞Exercice 7 ✧✧

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 - x^2 - x - 1 \end{array}$$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
Une tangente à $\mathscr{C}$ en a est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.
On résout $f'(x) = 0$.
$x_1 = 1$ est une racine évidente, par le produit des racines on trouve l'autre racine : $x_2 \times 1 = \frac{-1}{3}$ soit $x_2 = \frac{-1}{3}$.
On peut aussi calculer le discriminant, $\Delta = 4 + 12 = 16$ et trouver les deux racines.
Ainsi il existe deux tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}$, celle au point d'abscisse $\frac{-1}{3}$ son équation est $y = f\left(\frac{-1}{3}\right)$ soit $y = \frac{-22}{27}$ et celle au point d'abscisse son équation est $y = f(-1)$ soit $y = -2$: