Fonction exponentielle
Définition, équations et inéquations

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Définition

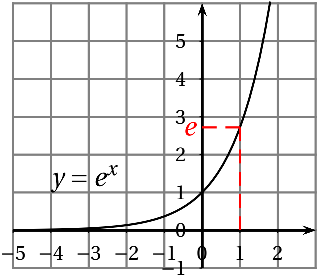
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle, on la note exp :

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \exp(x) = e^x \end{array}$$

$\exp' = \exp$; $\exp(1) = e \simeq 2,72$ et $\exp(0) = e^0 = 1$.
Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

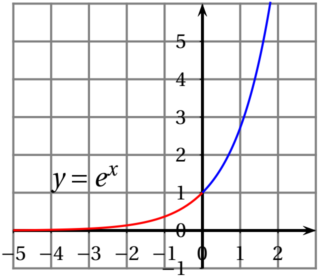
Propriétés

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\left(e^x\right)' = e^x$		$+$	
e^x		1	



Propriétés

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		$+$	
e^x		1	



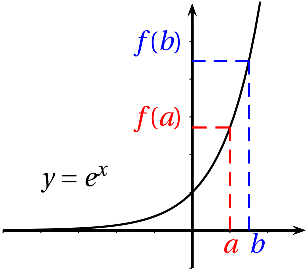
Les propriétés suivantes se déduisent des variations : $x \in \mathbb{R}$:,

$$x < 0 \iff 0 < e^x < 1,$$

$$x > 0 \iff e^x > 1,$$

Propriétés

x	$-\infty$ $\quad a \quad$ b $\quad +\infty$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$+$
e^x	$f(a) \nearrow f(b) \nearrow$



Les propriétés suivantes se déduisent des variations :

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$,

$$a = b \Longleftrightarrow e^a = e^b$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$,

$$a < b \Longleftrightarrow e^a < e^b$$

Exemple de résolutions

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $e^{x+1} = 1$

$$\begin{array}{rl|c} & e^{x+1} = 1 & \\ \iff & e^{x+1} = e^0 & e^0 = 1 \\ \iff & x+1 = 0 & e^a = e^b \iff a = b \\ \iff & x = -1 & \end{array}$$

Exemple de résolutions

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $e^{x+1} < \dfrac{e^x}{e^{x-1}}$

$$\begin{array}{rl|c}
 & e^{x+1} < \dfrac{e^x}{e^{x-1}} & \\
\iff & e^{x+1} < e^{x-(x-1)} & \color{blue}{e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}} \\
\iff & e^{x+1} < e^{1} & \\
\iff & x+1 < 1 & \color{red}{e^a < e^b \iff a < b} \\
\iff & x < 0 & \\
\iff & x \in]-\infty\,;\,0[&
\end{array}$$

Exemple de résolutions

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $e^{x+1} < \dfrac{e^x}{e^{x-1}}$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & e^{x+1} < \dfrac{e^x}{e^{x-1}} & \\
\iff & e^{x-1}e^{x+1} < e^x & \times e^{x-1} \text{ et } e^{x-1} > 0 \\
\iff & e^{x-1+x+1} < e^x & e^{a+b} = e^a \times e^b \\
\iff & e^{2x} < e^x & \\
\iff & 2x < x & e^a < e^b \iff a < b \\
\iff & x < 0 & \\
\iff & x \in]-\infty\,;\,0[&
\end{array}
$$

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - ex$.

- Dérivée : g est de la forme $u + v$ avec $u(x) = e^x$; $v(x) = ex$ et
  $u'(x) = e^x$ $v'(x) = e$.
  $f' = u' + v'$; $f'(x) = e^x - e$.
- Signe de $f'(x)$: Soit x un réel, $f'(x) > 0 \iff e^x - e > 0 \iff e^x > e$:

$$\begin{array}{cl|l} & e^x > e^1 & \\ \iff & x > 1 & e^x < e^y \iff x < y \\ \iff & x \in]1\,;\,+\infty[& \end{array}$$

- On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Exemple d'étude des variations d'une fonction

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - ex$.

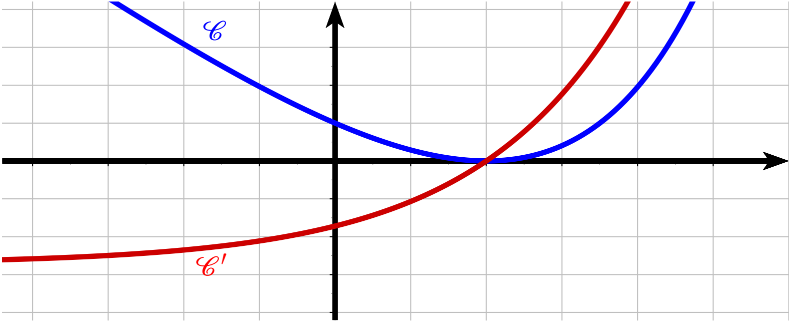
- Des variations de f on déduit le signe de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	
f		$+$	0	$+$	

Exemple d’étude des variations d’une fonction

Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = e^x - ex$ et $f'(x) = e^x - e$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	
f		$+$	0	$+$	



FIN