Fonction exponentielle
Définition et analyse

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Définition

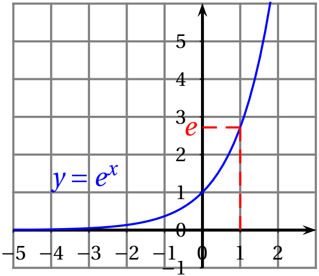
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle, on la note exp :

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \exp(x) = e^x \end{array}$$

$\exp' = \exp$; $\exp(1) = e \simeq 2,72$ et $\exp(0) = e^0 = 1$.
Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

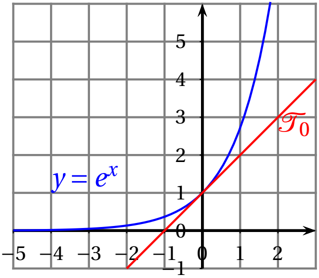
Propriétés

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\left(e^x\right)' = e^x$		$+$	
e^x		1	



Tangentes

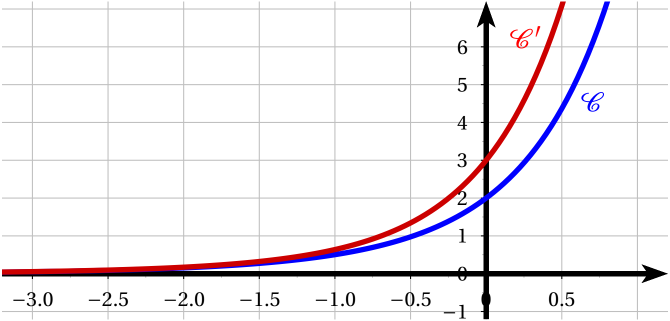
Soit la tangente $\mathscr{T}_a$ au point d'abscisse a, $a \in \mathbb{R}$.
$\mathscr{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$
$\mathscr{T}_a : y = e^a(x-a) + e^a$
En particulier pour $a = 0$, $\mathscr{T}_0 : y = x + 1$.



Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x(e^x + 1)$.

- Dérivée : f est de la forme uv avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = e^x + 1$;
  $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$
  $f' = u'v + uv'$, $f'(x) = e^x(e^x + 1) + e^x \times e^x = 2\left(e^x\right)^2 + e^x = e^x(2e^x + 1)$.
- Signe de $f'(x)$: Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $2e^x + 1 > 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$.
- Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = e^x(e^x + 1)$ et $f'(x) = e^x(2e^x + 1)$



x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$\nearrow$

Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est définie et dérivable sur I et on a :

$$\left(e^u\right)' = u' e^u.$$

En particulier si u est définie pour tout réel x par $u(x) = ax + b$ avec a et b nombre réel,

$$\left(e^{ax+b}\right)' = ae^{ax+b}.$$

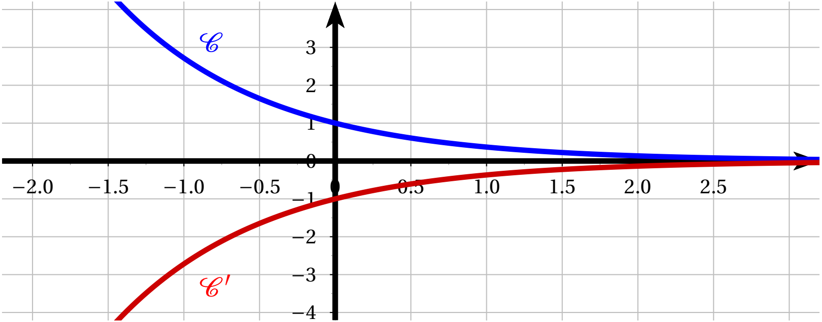
Soit la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

- Dérivée : g est de la forme e^{ax+b} avec $ax+b=-x$, $a=-1$ et $b=0$
  $\left(e^{ax+b}\right)' = ae^{ax+b}$, $g'(x) = -e^{-x} = \dfrac{-1}{e^x}$.

  On pouvait aussi remarquer que g est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec
  $v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$.
  $g' = \dfrac{-v'}{v^2}$; $g'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-1}{e^x} = -e^{-x}$.
- Signe de $g'(x)$: Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $g'(x) < 0$.
- Pour tout réel x, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple d'étude des variations d'une fonction

Sur $\mathbb{R}$: $g(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et $g'(x) = -e^{-x} = -\dfrac{1}{e^x}$.

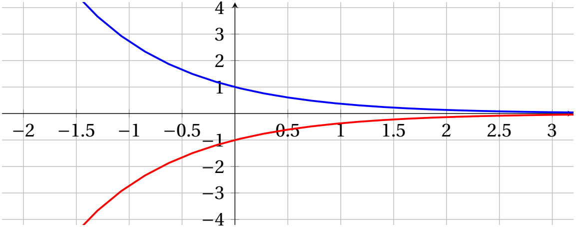


x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f'	$-$
f	$\searrow$

Exemple d'étude des variations d'une fonction

Pour a réel :

Sur $\mathbb{R}$: $g(x) = e^{ax}$ et $g'(x) = ae^{ax}$.



$a < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
f'	$-$
f	$\searrow$

$a > 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
f'	$+$
f	$\nearrow$

FIN