Fonction exponentielle
Définition et algèbre

Stéphane Mirbel
www.math-adore.fr

Définition

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle, on la note exp :

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

$\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

Soient a et b deux nombres réels :

On pose la fonction f définie et dérivable pour tout réel x par

$f(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(x)}$ avec $\exp(x) > 0$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ et $\left(g(mx+p)\right)' = mg'(mx+p)$.

$u(x) = \exp(x+b)$ et $u'(x) = 1 \times exp(x+b) = \exp(x+b)$

$v(x) = \exp(x)$ et $v'(x) = \exp(x)$.

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Ainsi, $f'(x) = \dfrac{\exp(x+b)\exp(x) - \exp(x+b)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$.

$f' = 0$ donc pour tout réel x, $f(x) = f(0) = \exp(b)$ donc

$f(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(x)} = \exp(b)$ donc $\exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b)$.

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$$

Soient a et b deux nombres réels :

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & \exp(a-a) = \exp(a) \times \exp(-a) & \\
\iff & \exp(0) = \exp(a) \times \exp(-a) & \\
\iff & 1 = \exp(a) \times \exp(-a) & \exp(0) = 1 \\
\iff & \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)} & \exp(a) > 0
\end{array}$$

$$\boxed{\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}}$$

Propriétés algébriques

Soient a et b deux nombres réels :

$$\boxed{\begin{array}{c} \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \\ \exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)} \end{array}}$$

$$\exp(a-b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

$$\boxed{\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}}$$

Propriétés algébriques

Soient a et b deux nombres réels et n un entier relatif :

$$\boxed{\begin{array}{l}\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)\\ \exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}\end{array}}$$

$n=-2$:

$\exp(na)=\exp(-2a)=\exp(-a-a)=\exp(-a)\times\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}\times\dfrac{1}{\exp(a)}$

$\exp(na)=\exp(-2a)=\dfrac{1}{(\exp(a))^2}=(\exp(a))^{-2}=(\exp(a))^n$

$n=-1$:

$\exp(na)=\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}=(\exp(a))^{-1}=(\exp(a))^n$

$n=0$:

$\exp(0a)=\exp(0)=1=\exp(a)^0=(\exp(a))^n$

$n=2$:

$\exp(na)=\exp(2a)=\exp(a+a)=\exp(a)\times\exp(a)=(\exp(a))^2=(\exp(a))^n$

$n=3$:

$\exp(na)=\exp(3a)=\exp(2a+a)=(\exp(a))^2\times\exp(a)=(\exp(a))^3=(\exp(a))^n$

$$\boxed{\exp(na)=(\exp(a))^n}$$

Propriétés algébriques et notation

Soient a et b deux nombres réels et n un entier relatif :

$$\boxed{\begin{array}{l} \exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b) \\ \exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)} \\ \exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)} \\ \exp(na)=\big(\exp(a)\big)^n \end{array}}$$

Avec la dernière relation et $a=1$ on a $\exp(n\times 1)=\big(\exp(1)\big)^n=e^n$
Avec $\exp(1)=e\simeq 2,72$.
Ainsi pour $n\in\mathbb{Z}$, $\exp(n)=e^n$.
Par extension, pour $a\in\mathbb{R}$, on notera $\exp(a)=e^a$.

Propriétés algébriques et notation

Soient a et b deux nombres réels et n un entier relatif :

	avec $\exp(1) = e \simeq 2,72$
$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
$\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$	$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
$\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$	$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
$\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$	$e^{na} = \left(e^a\right)^n$

Propriétés algébriques, exemple

Soient a et b deux nombres réels et n un entier relatif :

	avec $\exp(1) = e \simeq 2,72$
$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
$\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$	$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
$\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$	$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
$\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n$	$e^{na} = \left(e^a\right)^n$

Pour tout réel x :

$$\exp(x+1) \times \exp(1-x) = \exp(x+1+1-x) = \exp(2)$$

$$e^{x+1} \times e^{1-x} = e^{x+1+1-x} = e^2$$

Propriétés algébriques, exemple

Soient a et b deux nombres réels et n un entier relatif :

	avec $\exp(1) = e \simeq 2,72$
$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
$\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$	$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
$\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$	$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
$\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n$	$e^{na} = \left(e^a\right)^n$

Pour tout réel x :

$\exp(-x+1) = \exp(-(x-1)) = \dfrac{1}{\exp(x-1)}$	$e^{-x+1} = e^{-(x-1)} = \dfrac{1}{e^{x-1}}$

Soient a et b deux nombres réels et n un entier relatif :

	avec $\exp(1) = e \simeq 2,72$
$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$ $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ $\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$ $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $e^{na} = \left(e^a\right)^n$

Pour tout réel x :

$\exp(x-1) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(1)}$	$e^{x-1} = \dfrac{e^x}{e^1} = \dfrac{e^x}{e}$

Propriétés algébriques, exemple

Soient a et b deux nombres réels et n un entier relatif :

	avec $\exp(1) = e \simeq 2,72$
$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$	$e^{a+b} = e^a \times e^b$
$\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$	$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
$\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$	$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
$\exp(na) = \left(\exp(a)\right)^n$	$e^{na} = \left(e^a\right)^n$

Pour tout réel x :

$$\left(\exp(x)+1\right)^2 = (\exp(x))^2 + 2\exp(x) + 1 = \exp(2x) + 2\exp(x) + 1$$

$$\left(e^x+1\right)^2 = \left(e^x\right)^2 + 2e^x + 1 = e^{2x} + 2e^x + 1$$

Remarque :

- pour x réel différent de 0 et 2, $\exp\left((x^2\right) \neq \left(\exp(x)\right)^2$ ou $e^{x^2} \neq \left(e^x\right)^2$
- Pour tout réel x, $e^{2x} = e^x \times e^x$ et $2e^x = e^x + e^x$.

FIN